

Ed	二 次 関 数 編	正 答 ・ 解 説
----	-----------	-----------

正 答

問題 番号	解 答 記 号	正 解
1.	$\frac{2a-\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{2a-5}{2}$
	$\frac{-4a^2+\text{ウエ}}{4}$	$\frac{-4a^2+37}{4}$
	$\frac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$	$\frac{\sqrt{37}}{2}$
	ク	3
	ケコ	-3
	サシ、スセ	-5, -6 または -6, -5

問題 番号	解 答 記 号	正 解
2.	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{\text{オ}\pm\sqrt{\text{カキ}}}{\text{ク}}$	$\frac{5\pm\sqrt{22}}{2}$
	-ケ	-2
	$-\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$-\frac{3}{5}$
	$\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$	$\frac{7}{5}$
	セソ	-7

解 説

1.

$$(1) \quad y = -x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3$$

を平方完成する。

$$\begin{aligned} y &= -\left\{x^2 - (2a-5)x\right\} - 2a^2 + 5a + 3 \\ &= -\left\{\left(x - \frac{2a-5}{2}\right)^2 - \frac{(2a-5)^2}{4}\right\} - 2a^2 + 5a + 3 \\ &= -\left(x - \frac{2a-5}{2}\right)^2 + \frac{4a^2 - 20a + 25 - 8a^2 + 20a + 12}{4} \\ &= -\left(x - \frac{2a-5}{2}\right)^2 + \frac{-4a^2 + 37}{4} \end{aligned}$$

$$\text{頂点座標は} \left(\frac{2a-5}{2}, \frac{-4a^2 + 37}{4} \right)$$

(2) グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる時

$$-x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$x^2 - (2a-5)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0 \text{ の}$$

判別式 D が $D > 0$ となる。

$$D = (2a-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a^2 - 5a - 3) > 0$$

$$4a^2 - 20a + 25 - 8a^2 + 20a + 12 > 0$$

$$-4a^2 + 37 > 0 \quad 4a^2 - 37 < 0$$

$$(2a + \sqrt{37})(2a - \sqrt{37}) < 0$$

$$-\frac{\sqrt{37}}{2} < a < \frac{\sqrt{37}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

(3) a は①を満たす整数であり、

$$6 < \sqrt{37} < 7$$

$$-\frac{7}{2} < -\frac{\sqrt{37}}{2} < -3, 3 < \frac{\sqrt{37}}{2} < \frac{7}{2} \text{ より、}$$

$$a = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$$

また、 $-x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3 = 0$
の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a-5 \pm \sqrt{(2a-5)^2 - 4(2a^2 - 5a - 3)}}{2} \\ &= \frac{2a-5 \pm \sqrt{-4a^2 + 37}}{2} \end{aligned}$$

であり、これが整数になるとき

$-4a^2 + 37$ が平方数、かつ

$2a-5 \pm \sqrt{-4a^2 + 37}$ が偶数である必要が
ある。

$$-4a^2 + 37 = -4a^2 + 36 + 1 = 2(-2a^2 + 18) + 1$$

であるから、 $-4a^2 + 37$ は a の値に関わら

ず奇数である。

同様に、 $2a-5 = 2(a-2) - 1$ であるから
奇数となり、

(奇数) $\pm$ (奇数) = (偶数)

であるから、解は整数となる。

$-4a^2 + 37$ が平方数となる a を考える。

$$-4a^2 + 37 > 0 \text{ から}$$

$$4a^2 < 37 \quad a^2 < \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$$

a は整数より、 $a^2 = 0, 1, 4, 9$

$$a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$a^2 = 0, 1, 4, 9$ のうち、

$-4a^2 + 37$ が平方数となるのは、

$$a^2 = 9 \text{ のみであるから、} a = \underline{3, -3}$$

$a = -3$ のときの解は、

$$\begin{aligned}x &= \frac{2 \cdot (-3) - 5 \pm \sqrt{-4 \cdot 9 + 37}}{2} \\&= \frac{-6 - 5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-11 \pm 1}{2} \\&= -\frac{12}{2}, -\frac{10}{2} = \underline{-6}, \underline{-5}\end{aligned}$$

2. $y = x^2 - 2(a+2)x + a^2 - a + 1 \cdots \textcircled{C}$

(1) グラフ G と y 軸との交点の y 座標を Y とするから、 $(0, Y)$ を代入して

$$\begin{aligned}Y &= a^2 - a + 1 \\&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Y は $a = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

このときの、 x 軸の交点 x 座標は

$$\begin{aligned}0 &= x^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right)x + \frac{3}{4} \\&= x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} \\&= x^2 - 5x + \frac{3}{4} \\4x^2 - 20x + 3 &= 0 \\x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3}}{4} \\&= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 12}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{88}}{4} \\&= \frac{10 \pm 2\sqrt{22}}{4} = \underline{\frac{5 \pm \sqrt{22}}{2}}\end{aligned}$$

(2) グラフ G が y 軸に関して対称になるのは
グラフの軸が y 軸であるときである。

$\textcircled{C}$ 式を平方完成する。

$$\begin{aligned}y &= \{x - (a+2)\}^2 - (a+2)^2 + a^2 - a + 1 \\&= \{x - (a+2)\}^2 - (a^2 + 4a + 4) + a^2 - a + 1 \\&= \{x - (a+2)\}^2 - 5a - 3\end{aligned}$$

$a + 2 = 0$ より、 $a = \underline{-2}$

このときのグラフの式は

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 5 \cdot (-2) - 3 \\y &= x^2 + 7 \cdots \cdots G_1\end{aligned}$$

G が x 軸に接するのは、

$-5a - 3 = 0$ となるときだから、

$$-5a = 3 \quad a = \underline{-\frac{3}{5}}$$

このときのグラフの式は

$$\begin{aligned}y &= \left\{x - \left(-\frac{3}{5} + 2\right)\right\}^2 \\y &= \left(x - \frac{7}{5}\right)^2 \cdots \cdots G_2\end{aligned}$$

G_1 、 G_2 の頂点座標はそれぞれ

$G_1(0, 7)$ 、 $G_2\left(\frac{7}{5}, 0\right)$ であるから、

G_1 を

x 軸方向に $\frac{7}{5}$ 、 y 軸方向に $\underline{-7}$

平行移動すると G_2 になる。