

Dd	二 次 関 数 編	正 答 ・ 解 説
----	-----------	-----------

正 答

問題 番号	解 答 記 号	正 解
1.	ア	2
	$\frac{a-1}{イ}$	$\frac{a-1}{2}$
	ウエa+オ	$-2a+1$
	カ	3
	キ	1
	ク	8
	$-a^2 - ケ a$	$-a^2 - 4a$
	$-1+コ\sqrt{サ}$	$-1+2\sqrt{3}$

問題 番号	解 答 記 号	正 解
2.	$\frac{a}{ア}$	$\frac{a}{4}$
	$\frac{a^2}{イ}+b$	$\frac{a^2}{8}+b$
	ウエa+10	$-3a+10$
	オ	4
	カキ	20
	ク	4
	ケコ	12
	サシ	-8

解 説

1. C: $y = -4x^2 + 4(a-1)x - a^2$ ①

(1) 点 $(1, -4)$ を通るから、①へ代入

$$-4 = -4 \cdot 1^2 + 4(a-1) \cdot 1 - a^2$$

$$-4 = -4 + 4a - 4 - a^2$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a-2)^2 = 0 \quad a = \underline{2}$$

(2) ①を平方完成する。

$$y = -4 \left\{ x^2 - (a-1)x \right\} - a^2$$

$$= -4 \left\{ \left(x - \frac{a-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-1}{2} \right)^2 \right\} - a^2$$

$$= -4 \left(x - \frac{a-1}{2} \right)^2 + a^2 - 2a + 1 - a^2$$

$$= -4 \left(x - \frac{a-1}{2} \right)^2 - 2a + 1$$

$$\text{頂点座標は} \left(\frac{a-1}{2}, -2a+1 \right)$$

(3) $a > 1$ とすると、

$$a-1 > 0 \quad \frac{a-1}{2} > 0 \text{ であり、}$$

グラフは上に凸、かつ、

頂点の x 座標が正であることを表す。

このとき

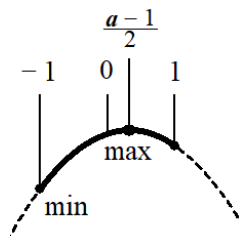
(i) 右図から

$$0 < \frac{a-1}{2} \leq 1$$

すなわち

$$1 < a \leq \underline{3} \text{ のとき}$$

頂点が最大だから、その値は $-2a+1$



(ii) 右図から

$$1 < \frac{a-1}{2}$$

すなわち

$3 < a$ のとき

$x=1$ で最大となり

その値は

$$-4 \cdot 1^2 + 4(a-1) \cdot 1 - a^2$$

$$= -4 + 4a - 4 - a^2 = -a^2 + 4a - \underline{8}$$

(i)、(ii)の図から

最小となるのはともに $x=-1$ のとき。

その値は

$$-4 \cdot (-1)^2 + 4(a-1) \cdot (-1) - a^2$$

$$= -4 - 4a + 4 - a^2 = -a^2 - \underline{4a}$$

最大値と最小値の差が 12 になるのは

(i) $1 < a \leq 3$ のとき、

$$-2a+1 - (-a^2-4a) = 12$$

$$a^2 + 2a - 11 = 0$$

$$a = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-11)} = -1 \pm \sqrt{12} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$3 < \sqrt{12} < 4 \text{ より、} 2 < -1 + 2\sqrt{3} < 3$$

$1 < a \leq 3$ を満たすから、

$$a = -1 + 2\sqrt{3}$$

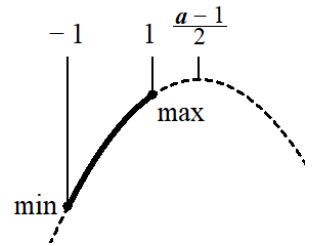
(ii) $3 < a$ のとき、

$$-a^2 + 4a - 8 - (-a^2 - 4a) = 12$$

$$8a = 20 \quad a = \frac{5}{2}$$

これは $3 < a$ を満たさない。

よって、条件を満たすのは $a = -1 + \underline{2\sqrt{3}}$



2. $y = -2x^2 + ax + b$ …… ① を平方完成する。

$$\begin{aligned}y &= -2\left(x^2 - \frac{a}{2}x\right) + b \\&= -2\left\{\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16}\right\} + b \\&= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + b\end{aligned}$$

$$\text{C の頂点は}\left(\frac{a}{4}, \frac{a^2}{8} + b\right)$$

また C が点 (3, -8) を通るとき、
(3, -8) を①へ代入すると

$$-8 = -2 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + b$$

$$-8 = -18 + 3a + b$$

$$b = \underline{-3a + 10}$$

このときのグラフの式は

$$y = -2x^2 + ax - 3a + 10 \quad \dots\dots \text{①}'$$

$$= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} - 3a + 10$$

$$= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2 - 24a + 80}{8} \quad \dots\dots \text{①}''$$

(1) C が x 軸と接するとき

頂点の y 座標の値が 0 であるから、

①''より、

$$\frac{a^2 - 24a + 80}{8} = 0$$

これを解くと

$$a^2 - 24a + 80 = 0$$

$$(a - 4)(a - 20) = 0 \quad a = \underline{4}, \underline{20}$$

$a = 20$ のときの頂点座標は (5, 0)

$a = 4$ のときの頂点座標は (1, 0)

$a = 20$ のときの放物線は、 $a = 4$ のときの

放物線を x 軸方向に 4 平行移動したもの。

(2) ①''より C の頂点の y 座標を平方完成する

$$\begin{aligned}\frac{a^2 - 24a + 80}{8} &= \frac{1}{8}(a^2 - 24a) + 10 \\&= \frac{1}{8}\{(a - 12)^2 - 144\} + 10 \\&= \frac{1}{8}(a - 12)^2 - 18 + 10 \\&= \frac{1}{8}(a - 12)^2 - 8\end{aligned}$$

y 座標の値が最小になるのは、 $a = \underline{12}$

のときで、その最小値は -8 である。