

Bd	二 次 関 数 編	正 答 ・ 解 説
----	-----------	-----------

正 答

問題 番号	解 答 記 号	正 解
1.	ア a	$2a$
	イ $a - ウ b + エ$	$-4a - 3b + 9$
	$a = オ, b = カ$	$a = 1, b = 1$
	キ $ク$	20
	$a = ケ, b = コ$	$a = 2, b = 4$
	サ	2
	シ	5

解 説

1. $y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9$ を平方完成

$$\begin{aligned} y &= (x-2a)^2 - 4a^2 + 4a^2 - 4a - 3b + 9 \\ &= (x-2a)^2 - 4a - 3b + 9 \end{aligned}$$

頂点座標 ($2a$, $-4a-3b+9$)

- (1) グラフが x 軸と交わらないとき

C は下に凸の形だから、

頂点 y 座標が正である。

$$-4a - 3b + 9 > 0$$

を満たす自然数 a, b を考えると、

$$-4a - 3b < 0 \text{ だから、}$$

$$4a + 3b < 9 \text{ かつ } a \geq 1, b \geq 1$$

を満たすとき、 $a = \underline{1}$, $b = \underline{1}$

- (2) $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = 0$ の解は、

$$\begin{aligned} x &= -(-2a) \pm \sqrt{(2a)^2 - (4a^2 - 4a - 3b + 9)} \\ &= 2a \pm \sqrt{4a + 3b - 9} \end{aligned}$$

2つの解の差が $2\sqrt{11}$ だから

$$2\sqrt{4a + 3b - 9} = 2\sqrt{11}$$

$$4a + 3b - 9 = 11$$

$$4a + 3b = \underline{20}$$

$$4a - 20 = -3b$$

$$4(a-5) = -3b$$

4 と 3 は互いに素であるから

$$\begin{cases} a-5 = -3 \\ 4 = b \end{cases}$$

よって、 $a = \underline{2}$, $b = \underline{4}$

- (3) グラフ C の頂点 ($2a, -4a-3b+9$) を

y 軸方向に -3 だけ平行移動すると、

頂点は ($2a, -4a-3b+6$)

そこから x 軸に対して対称移動すると、

頂点は ($2a, 4a+3b-6$)

また、下に凸のグラフは、上へ凸になるから

$$\begin{aligned} y &= -(x-2a)^2 + 4a + 3b - 6 \\ &= -(x^2 - 4ax + 4a^2) + 4a + 3b - 6 \\ &= -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a + 3b - 6 \end{aligned}$$

これが $y = -x^2 + 8x + 1$ になるから、

$$-x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a + 3b - 6 = -x^2 + 8x + 1$$

x の係数と定数項が一致するから、

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ -4a^2 + 4a + 3b - 6 = 1 \end{cases}$$

$a = 2$ を $-4a^2 + 4a + 3b - 6 = 1$ へ代入

$$-4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3b - 6 = 1$$

$$-16 + 8 + 3b - 6 = 1$$

$$3b = 15 \quad b = 5$$

よって、 $a = \underline{2}$, $b = \underline{5}$