Ad	二 次 関 数 編	正 答 ・ 解 説

正　答

問題番号	解答記号	正解
1.	$\dfrac{k-\text{アイ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{k-13}{2}$
	エ	4
	オ	1
	カキ	25
	$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{4}{3}$
	$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{-4}{3}$
	スセ ， ソタ	-2 , 28

問題番号	解答記号	正解
2.	$\dfrac{a-\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{a-2}{2}$
	ウ	3
	エオ	-2
	カ	6
	キ	1
	ク	3
	$-x^2-\text{ケ}\,x-\text{コ}$	$-x^2-2x-4$
	サ	2

解　説

1.　C： $y=\frac{9}{4}x^2+ax+b$ ……① が

2点 $(0,4)$, $(2,k)$ を通るから

$$\begin{cases} b=\underline{4} \\ \frac{9}{4}\times 2^2+2a+b=k \end{cases}$$

$9+2a+4=k$

$2a+13=k$　　$a=\underline{\underline{\frac{k-13}{2}}}$

(1) ①へ代入

$y=\frac{9}{4}x^2+\frac{k-13}{2}x+4$

$\frac{9}{4}x^2+\frac{k-13}{2}x+4=0$ の判別式を

D とすると、グラフが x 軸と接するのは

$D=0$ のときである。

$D=\left(\frac{k-13}{2}\right)^2-4\cdot\frac{9}{4}\cdot 4$

$=\frac{(k-13)^2}{4}-36$

$\frac{(k-13)^2}{4}-36=0$ を解くと

$(k-13)^2=144$　　$k-13=\pm 12$

$k=13\pm 12$　　$k=\underline{1}$, $\underline{25}$

$k=1$ のとき、

$\frac{9}{4}x^2+\frac{1-13}{2}x+4=0$

$\frac{9}{4}x^2-6x+4=0$　　$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)^2=0$　　$x=\underline{\frac{4}{3}}$

$k=25$ のとき、

$\frac{9}{4}x^2+\frac{25-13}{2}x+4=0$

$\frac{9}{4}x^2+6x+4=0$　　$9x^2+24x+16=0$

$(3x+4)^2=0$　　$x=\underline{-\frac{4}{3}}$

(2) グラフと x 軸が交わる2点A, Bの x 座標をそれぞれ α , β $(\alpha<\beta)$ とすると、

$\frac{9}{4}x^2+\frac{k-13}{2}x+4=0$ を解いて

$9x^2+2(k-13)x+16=0$

$x=\frac{-(k-13)\pm\sqrt{(k-13)^2-9\cdot 16}}{9}$

$=\frac{-k+13\pm\sqrt{k^2-26k+169-144}}{9}$

$=\frac{-k+13\pm\sqrt{k^2-26k+25}}{9}$

$$\begin{cases} \alpha=\frac{-k+13-\sqrt{k^2-26k+25}}{9} \\ \beta=\frac{-k+13+\sqrt{k^2-26k+25}}{9} \\ \beta-\alpha\geqq 2 \end{cases}$$ より、

$\frac{2\sqrt{k^2-26k+25}}{9}\geqq 2$

$\sqrt{k^2-26k+25}\geqq 9$

$k^2-26k+25\geqq 81$

$k^2-26k-56\geqq 0$

$(k+2)(k-28)\geqq 0$

$k\leqq -2$, $28\leqq k$　　……②

（※ **解と係数の関係**からも算出可）

異なる 2 つの解をもつことから
判別式 $D>0$ である。

$\dfrac{(k-13)^2}{4}-36>0$ を解くと

$(k-13)^2>144$
$k-13<-12\ ,\ 12<k-13$
$k<1\ ,\ 25<k$ ……③

②, ③より $k \leqq \underline{-2}\ ,\ \underline{28} \leqq k$

2.
(1) ①より、

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a-4$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-4a}{4}-4$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2-4}{4}-4$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+1-4$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-\underline{2}}{\underline{2}}\right)^2-\underline{3}$$

$\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2 \geqq 0$ より

$-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2 \leqq 0 \qquad -\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3<0$

下に凸のグラフで頂点の y 座標が
常に負だから、グラフは x 軸と異なる
2 点で交わり、2 次方程式②は
2 解 α , β を持つことがわかる。
②の解は

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(a-4)}}{2}$$
$$=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4a+16}}{2}$$

であるから、

$$(\alpha-\beta)^2$$
$$=\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4a+16}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4a+16}}{2}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{a^2-4a+16}\right)^2$$
$$=a^2-4a+16$$

$(\alpha-\beta)^2<28$ から、$a^2-4a+16<28$

これを解くと

$a^2-4a-12<0 \quad (a+2)(a-6)<0$

$\underline{-2}<a<\underline{6}$

(2) ①を a に着目してまとめると
$y=(x+1)a+x^2-4$
$x+1=0$ すなわち $x=-1$ のとき
①は a に影響をされない式になる。

そのときの y の値は $y=(-1)^2-4=-3$

よって、放物線①は $(-\underline{1}\ ,-\underline{3})$ を通る。

(1)から頂点座標 $\left(-\dfrac{a}{2}\ ,-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3\right)$

$\begin{cases} X=-\dfrac{a}{2} \\ Y=-\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2-3 \end{cases}$ とすると、$a=-2X$

代入すると

$$Y=-\left(\frac{-2X-2}{2}\right)^2-3$$
$$=-(-X-1)^2-3$$
$$=-(X^2+2X+1)-3$$
$$=-X^2-2X-1-3$$
$$=-X^2-2X-4$$

よって、①の頂点の方程式は

$y=-x^2-\underline{2}x-\underline{4}$ ……③

(3) ③より

$$y=-(x^2+2x)-4$$
$$=-\left\{(x+1)^2-1^2\right\}-4$$
$$=-(x+1)^2+1-4$$
$$=-(x+1)^2-3$$

③頂点は $(-1, -3)$ 、

①頂点は $\left(-\frac{a}{2}, -\left(\frac{a-2}{2}\right)^2-3\right)$

①、③の頂点の y 座標が等しくなるとき

$$-\left(\frac{a-2}{2}\right)^2-3=-3$$

これを解くと

$-\left(\frac{a-2}{2}\right)^2=0$ $\quad \frac{a-2}{2}=0$

$a-2=0$ $\quad a=\underline{2}$