

(注) この科目には、選択問題があります。

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] 座標平面において、直線

$$y = (\tan \theta)x - 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を ℓ とし、円

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を C とする。ただし、 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数である。

ℓ と C は異なる2点で交わる。このうち、 y 軸上にあるものを A とし、 A でない方を B とする。

点 A の座標は $(0, \text{アイ})$ である。点 B の座標を (p, q) とおく。

①, ② より p を求めると

$$p = \frac{\text{ウ} \tan \theta}{\text{エ} + \tan^2 \theta}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

さらに, $1 + \tan^2 \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\cos^2 \theta}$ であることを利用すると

$$p = \boxed{\text{カ}} \sin \theta \cos \theta, \quad q = \boxed{\text{キ}} \sin^2 \theta - \boxed{\text{ク}}$$

となる。

よって, $p + q = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \right)$ と表され, θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の

範囲を変化するとき, $p + q$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}} < p + q \leq \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

また, θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき, pq は $\theta = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \pi$ において

最大値 $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとる。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

[2] $1 - \log_{10} 2 \leq \log_{10}(3^m - 2) + \log_{10}(2^n - 3) < 3 \log_{10} 2 \dots\dots\dots (*)$

を満たす整数の組 (m, n) について考える。

真数が正であるから m は ツ 以上の整数であり, n は テ 以上の整数である。

この条件のもとで $(*)$ を変形すると

$$\text{ト} \leq (3^m - 2)(2^n - 3) < \text{ナ}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

$3^m, 2^n$ はともに整数であるから, (*) を満たす整数の組 (m, n) を求めると

$$(m, n) = (\boxed{\text{二}}, \boxed{\text{又}}), (\boxed{\text{ネ}}, \boxed{\text{ノ}})$$

となる。ただし, $\boxed{\text{二}} < \boxed{\text{ネ}}$ とする。

$(m, n) = (\boxed{\text{二}}, \boxed{\text{又}})$ のとき, $\{(3^m - 2)(2^n - 3)\}^k$ の桁数が 70 となるような自然数 k のうち最小のものは $\boxed{\text{ハヒ}}$ である。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ としてよい。