第４問　ベクトル

A(0, −1, 0), B(2, 0, 1), C(0, 0, −1), D(3, 2, 1).

Oを原点とする.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(2,\ 0,\ 1)-(0,\ -1,\ 0)\\&=(\boxed{2},\ \boxed{1},\ \boxed{1}),\end{aligned}$$

⬅ $\overrightarrow{OB}=(2,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{OA}=(0,\ -1,\ 0)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=(0,\ 0,\ -1)-(0,\ -1,\ 0)\\&=(\boxed{0},\ \boxed{1},\ \boxed{-1})\end{aligned}$$

⬅ $\overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ -1)$.

であるから

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{\boxed{6}},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{\boxed{2}}$$

⬅ $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$ のとき
$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

である．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=2\times0+1\times1+1\times(-1)\\&=0\end{aligned}$$

であるから，$\angle BAC=\boxed{90}^\circ$ である．

⬅ $\angle BAC$ を求めるにあたり，
$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$ であるから，
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を計算した．

よって

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\\&=\sqrt{\boxed{3}}.\end{aligned}$$

⬅ $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

三角形ABCは $\angle A=90^\circ$ の直角三角形.

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$ $(p\geqq0)$ としている．

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=\boxed{0}$ であるから

$$\begin{cases}2\times p+1\times q+1\times r=0,\\0\times p+1\times q+(-1)\times r=0\end{cases}$$

⬅ $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

すなわち

$$\begin{cases}2p+q+r=0,\\q-r=0.\end{cases}$$

これより

$$q=-p,\quad r=-p$$

⬅ $q=r$ より
$2p+r+r=0$
$r=-p(=q)$.

であり

$$\begin{aligned}\vec{n}&=(p,\ -p,\ -p)\\&=p(\boxed{1},\ \boxed{-1},\ \boxed{-1})\end{aligned}$$

となる．$|\vec{n}|=1$ であるから

$$p\times\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=1$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

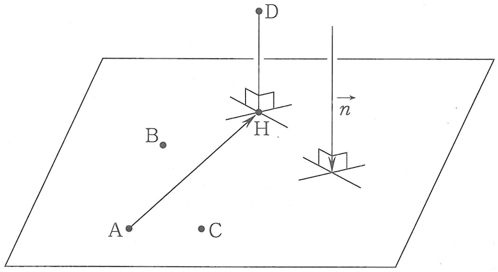
⬅ $p\geqq0$ より $|p|=p$.

したがって

$$\vec{n}=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}(1,\ -1,\ -1)$$

である．

点Dを通り平面ABCに垂直な直線と平面ABCの交点がHである．



$\overrightarrow{\mathrm{DH}} /\!/ \vec{n}$ であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\vec{n}\end{aligned}$$

と表される．

点Hが平面ABC上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{n}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\vec{n})\cdot\vec{n}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}+t|\vec{n}|^2=0. \qquad \cdots①$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}&=\frac{\sqrt{3}}{3}\{3\times1+3\times(-1)+1\times(-1)\}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

⬅ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$=(3,\ 2,\ 1)-(0,\ -1,\ 0)$
$=(3,\ 3,\ 1),$
$\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ -1,\ -1).$

と $|\vec{n}|=1$ より，①は

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}+t\times1^2=0$$

となるので，$t=\dfrac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$ である．

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{n}\\&=(3,\ 3,\ 1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ -1,\ -1)\\&=\left(\frac{10}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right).\end{aligned} \qquad \cdots②$$

⬅ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\vec{n}.$

また，実数 α，β を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha(2,\ 1,\ 1)+\beta(0,\ 1,\ -1)$$

⬅ 点Hは平面ABC上にある．

$$=(2\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha-\beta). \qquad \cdots ③$$

②，③より

$$\begin{cases} 2\alpha=\dfrac{10}{3}, \\ \alpha+\beta=\dfrac{8}{3}, \\ \alpha-\beta=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

これを解いて

$$\alpha=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}, \quad \beta=\boxed{1}$$

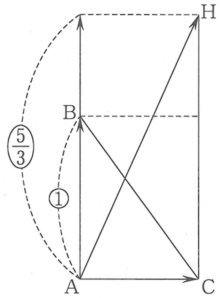
⬅ 直前の三つの等式をすべて満たす．

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

⬅ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

A，B，C，H の位置関係は次図のようになる．



上図より

$$\triangle\mathrm{ACH}=\frac{5}{3}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

⬅ $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{3}$.

四面体 ACDH において，三角形 ACH を底面とみたとき，高さは $|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=|t\vec{n}|=|t||\vec{n}|$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

⬅ $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=t\vec{n}$.

⬅ $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$|\vec{n}|=1$.

したがって，四面体 ACDH の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ACH}\times|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}.$$