第３問　数　列

等比数列 $\{a_n\}$ は正の実数からなる数列であるから，その初項と公比はともに正の実数である．初項を a (>0)，公比を r (>0) とすると，条件

$$a_1a_3=a_4=16$$

より

$$\begin{cases} a\cdot ar^2=16, & \cdots ① \\ ar^3=16 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす．

①と $a>0$，$r>0$ より $ar=4$ であり，②に代入すると $4r^2=16$ となり，$r=2$ を得る．

これと $ar=4$ より $a=2$ である．よって，$\{a_n\}$ の初項は $\boxed{2}$，公比は $\boxed{2}$ である．

また

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$=\boxed{2}^{n+\boxed{1}}-\boxed{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1=2,\quad b_{n+1}-b_n=2n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすので，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$$
$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$
$$=2+\frac{n-1}{2}\{5+(2n+1)\}$$
$$=n^2+2n-1$$

となり，この式は $n=1$ のときも成り立つ．よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=n^{\boxed{2}}+\boxed{2}n-\boxed{1}$$

である．また

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6n\}$$
$$=\frac{n\left(\boxed{2}n^{\boxed{2}}+\boxed{9}n+\boxed{1}\right)}{\boxed{6}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

$ar>0$.

等比数列の和

初項 a，公比 r $(\neq 1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

階差数列

$n\geqq 2$ に対して

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k).$$

等差数列の和

等差数列の初項を a，末項を ℓ，項数を n とすると，項の総和は

$$\frac{n}{2}(a+\ell).$$

和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}1=n,$$
$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b_n は

$$b_n = \boxed{2}n^2 - \left(n - \boxed{1}\right)^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる．$f(n)=(n-1)^2\cdot 2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$\begin{aligned} a_nb_n &= 2^n\cdot\{2n^2-(n-1)^2\} \\ &= n^2\cdot 2^{n+1}-(n-1)^2\cdot 2^n \\ &= f(n+1)-f(n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

← $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

と表されるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{-f(k)+f(k+1)\} \\ &= \{-f(1)+\cancel{f(2)}\}+\{-\cancel{f(2)}+\cancel{f(3)}\}+\{-\cancel{f(3)}+\cancel{f(4)}\} \\ &\quad +\cdots+\{-\cancel{f(n)}+f(n+1)\} \\ &= f(n+1)-f(1) \\ &= n^{\boxed{2}}\cdot 2^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

となる．$\boxed{チ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

S_n を 3 で割ったときの余りを r_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
n^2 を 3 で割ったときの余り	1	1	0	1	1	0	1	1	$\cdots$
2^{n+1} を 3 で割ったときの余り	1	2	1	2	1	2	1	2	$\cdots$
r_n	1	2	0	2	1	0	1	2	$\cdots$

← $\{1,\ 1,\ 0\}$ が繰り返し続くと予想．…(ア)

← $\{1,\ 2\}$ が繰り返し続くと予想．…(イ)

← r_n は，n^2 を 3 で割ったときの余りと 2^{n+1} を 3 で割ったときの余りの積を 3 で割ったときの余りである．

(ア), (イ) より $\{1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0\}$ が繰り返し続くと予想．

上の表より，$r_{n+6}=r_n$ と予想でき，これが正しいことを以下で示す．

$$\begin{aligned} S_{n+6}-S_n &= (n+6)^2\cdot 2^{n+7}-n^2\cdot 2^{n+1} \\ &= \{(n+6)^2\cdot 2^6-n^2\}\cdot 2^{n+1} \\ &= (63n^2+2^7\cdot 6n+2^6\cdot 6^2)\cdot 2^{n+1} \\ &= 3(21n^2+2^8n+2^7\cdot 6)\cdot 2^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

より，$S_{n+6}-S_n$ は 3 の倍数である．よって，自然数 n に対して，S_{n+6} を 3 で割ったときの余りは S_n を 3 で割ったときの余りと等しい．すなわち

$$r_{n+6}=r_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．

← 自然数 N，M，k に対し

$$N-M=(k\text{ の倍数})$$

であるとき，N と M を k で割ったときの余りは等しい．

ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2015} r_k &= (1+2+0+2+1+0)\cdot 335+(1+2+0+2+1) \\ &= 6\cdot 335+6 \\ &= \boxed{2016} \end{aligned}$$

← $2015=6\cdot 335+5$.

である．