第2問　微分法・積分法

$$f(x)=2x^3+3(1-a)x^2-6ax+1$$

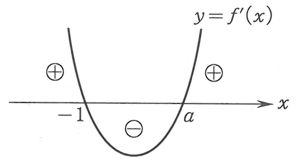
より

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2+6(1-a)x-6a \\ &=6\{x^2+(1-a)x-a\} \\ &=\boxed{6}(x+\boxed{1})(x-\boxed{a}) \end{aligned}$$

である．$a>-1$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

⬅ $f'(x)$ の符号は $y=f'(x)$ のグラフから判断するとよい．



よって，$f(x)$ は $x=\boxed{a}$ において極小値をとり，極小値 $g(a)$ は

$$\begin{aligned} g(a)&=f(a) \\ &=2a^3+3(1-a)a^2-6a\cdot a+1 \\ &=\boxed{-}a^3-\boxed{3}a^2+\boxed{1} \end{aligned}$$

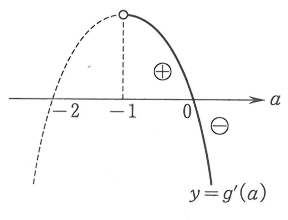
である．

$$\begin{aligned} g'(a)&=-3a^2-6a \\ &=-3a(a+2) \end{aligned}$$

より，$a>-1$ において a を変化させると，$g(a)$ の増減は次のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	極大	↘

⬅ $g'(a)$ の符号は $y=g'(a)$ のグラフから判断するとよい．



よって，$g(a)$ $(a>-1)$ は $a=\boxed{0}$ のとき最大値 $\boxed{1}$ をとる．

$a=0$ のとき

$$f(x)=2x^3+3x^2+1,\quad f'(x)=6x^2+6x$$

であり，このときの曲線 $y=f(x)$ が C である．

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=(6t^2+6t)(x-t)+(2t^3+3t^2+1)$$

すなわち

$$y=(\boxed{6}t^2+\boxed{6}t)x-\boxed{4}t^3-\boxed{3}t^2+\boxed{1}$$

であるから，ℓ と y 軸の交点 Q の y 座標 q は

$$q=-4t^3-3t^2+1$$

である．$q>1$ より

$$-4t^3-3t^2+1>1$$

すなわち

⬅ **接線の方程式**

曲線 C: $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における曲線 C の接線の傾きは

$$f'(t)$$

であり，接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$

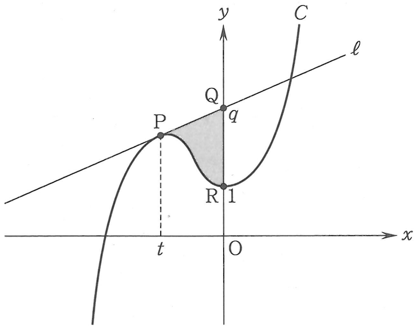
$$t^2(4t+3)<0$$

である．よって，$q>1$ を満たす t の値の範囲は

$$t<\frac{\boxed{-3}}{\boxed{4}}$$

である．

← $t=0$ のとき，$t^2(4t+3)<0$ は成り立たないから，$t^2>0$ である．



C と ℓ で囲まれた図形のうち，不等式 $x\leqq 0$ の表す領域に含まれる部分は上図の影の部分であり，その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\int_t^0\{(6t^2+6t)x-4t^3-3t^2+1-(2x^3+3x^2+1)\}\,dx$$

$$=\int_0^t\{2x^3+3x^2-(6t^2+6t)x+4t^3+3t^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}+x^3-(3t^2+3t)x^2+(4t^3+3t^2)x\right]_0^t$$

$$=\frac{t^4}{2}+t^3-(3t^2+3t)t^2+(4t^3+3t^2)t$$

$$=\frac{3}{2}t^4+t^3$$

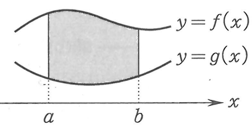
$$=\frac{t^3(\boxed{3}t+\boxed{2})}{2}$$

である．よって

面積

$a\leqq x\leqq b$ において，つねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つとき，下図の影の部分の面積は

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



← $\int_a^b h(x)\,dx=\int_b^a\{-h(x)\}\,dx.$

$$S'(t)=6t^3+3t^2$$

$$=6t^2\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

← $S(t)=\frac{3}{2}t^4+t^3$ より
$S'(t)=6t^3+3t^2.$

であり，$t<-\frac{3}{4}$ において $S'(t)<0$ であるから，$t<-\frac{3}{4}$ において $S(t)$ は単調減少である．$\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

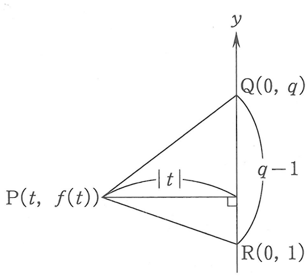
また，$\mathrm{R}(0,\ 1)$ であるから，三角形PQRの面積 $T(t)$ は

$$T(t)=\frac{1}{2}(-4t^3-3t^2)\cdot(-t)$$

$$=\frac{t^3(\boxed{4}t+\boxed{3})}{2}$$

である．よって，$S(t)=T(t)$ を満たす t の値は

←



$t<-\frac{3}{4}$ より $|t|=-t.$

$q=-4t^3-3t^2+1$ より

$q-1=-4t^3-3t^2$ である．

$$\frac{t^3(3t+2)}{2}=\frac{t^3(4t+3)}{2}$$

より

$$3t+2=4t+3$$

⬅ $t<-\frac{3}{4}$ より $t\neq 0$.

すなわち

$$t=\boxed{-1}$$

⬅ $t<-\frac{3}{4}$ を満たす.

である.