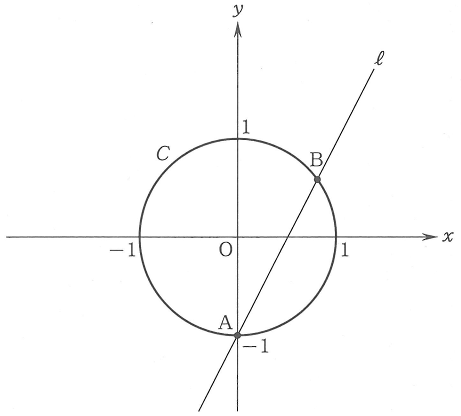
第1問　三角関数，指数関数・対数関数

［1］



$$\ell : y=(\tan\theta)x-1. \qquad \cdots ①$$

$$C : x^2+y^2=1. \qquad \cdots ②$$

①，② より y を消去すると

$$x^2+\{(\tan\theta)x-1\}^2=1$$

$$(1+\tan^2\theta)x^2-2(\tan\theta)x=0$$

$$x\{(1+\tan^2\theta)x-2\tan\theta\}=0$$

であるから

$$x=0,\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

を得る．

$x=0$ のとき，① より $y=-1$ であるから，点 A の座標は $\left(0,\ \boxed{-1}\right)$ である．

← y 軸上にある点の x 座標は 0.

また，点 A でない方の点 B の x 座標 p は

$$p=\frac{\boxed{2}\tan\theta}{\boxed{1}+\tan^2\theta}$$

となる．

← $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\neq 0$.

さらに

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\boxed{1}}{\cos^2\theta}$$

← $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

であるから

$$p=\frac{2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}=\boxed{2}\sin\theta\cos\theta$$

となる．また，点 B$(p,\ q)$ は ① 上の点であるから

$$q=(\tan\theta)p-1=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta-1$$

$$=\boxed{2}\sin^2\theta-\boxed{1}$$

となる．

よって

$$p=\sin 2\theta,\ \ q=-\cos 2\theta \qquad \cdots ③$$

> 2倍角の公式
> $\begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta, \\ \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta.\end{cases}$

と変形できるから

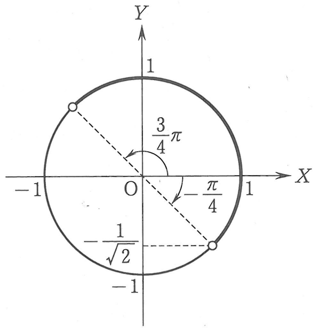
$$\begin{aligned} p+q&=\sin 2\theta-\cos 2\theta \\ &=\sqrt{\boxed{2}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\boxed{4}}\right)\end{aligned}$$

> 三角関数の合成
> $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき
> $a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$.
> ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり
> $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$
> である．

と表される．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{4}<2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$



すなわち $-1<\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$ である．

したがって，$p+q$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{-1}<p+q\leqq\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

また，③より

$$\begin{aligned} pq&=-\sin 2\theta\cos 2\theta \\ &=-\frac{1}{2}\sin 4\theta\end{aligned}$$

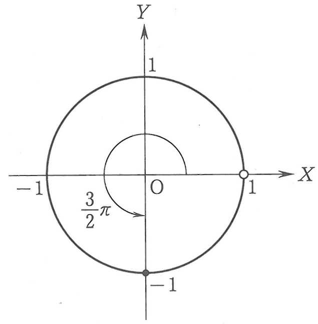
> $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ において
> $x=2\theta$ とした．

と表される．

pq が最大となるのは，$\sin 4\theta$ が最小となるときである．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<4\theta<2\pi$ であるから，$4\theta=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち

$\theta=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{8}}\pi$ において，$\sin 4\theta$ は最小値 -1 をとり，このとき



pq は最大値 $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ をとる．

［2］

$$1-\log_{10}2\leqq\log_{10}(3^m-2)+\log_{10}(2^n-3)<3\log_{10}2. \qquad \cdots (*)$$

真数が正であるから

$$3^m-2>0,\ \text{すなわち}\ \ 3^m>2 \qquad \cdots ④$$

かつ

$$2^n-3>0,\ \text{すなわち}\ \ 2^n>3. \qquad \cdots ⑤$$

m，n は整数であるから，④より m は $\boxed{1}$ 以上の整数であり，⑤より n は $\boxed{2}$ 以上の整数である．

> $(1=)\ 3^0<2<3^1\ (=3)$.
> $(2=)\ 2^1<3<2^2\ (=4)$.

この条件のもとで

$$\begin{cases} 1-\log_{10}2=\log_{10}10-\log_{10}2=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}5, \\ \log_{10}(3^m-2)+\log_{10}(2^n-3)=\log_{10}(3^m-2)(2^n-3), \\ 3\log_{10}2=\log_{10}2^3=\log_{10}8 \end{cases}$$

であるから，(*)は

$$\log_{10}5 \leqq \log_{10}(3^m-2)(2^n-3) < \log_{10}8$$

と変形できる．さらに，底10は1より大きいから

$$\boxed{5} \leqq (3^m-2)(2^n-3) < \boxed{8} \quad \cdots ⑥$$

となる．

ここで，mは1以上の整数であるから，3^mは3以上の整数である．さらに，3^mは奇数であるから，3^m-2 は正の奇数である．

また，nは2以上の整数であるから，2^nは4以上の整数である．さらに，2^nは偶数であるから，2^n-3 は正の奇数である．

したがって $(3^m-2)(2^n-3)$ は奇数であるから，⑥より

$$(3^m-2)(2^n-3)=5 \text{ または } 7$$

である．

(i) $(3^m-2)(2^n-3)=5$ のとき．

5の正の約数は1と5であるから

$$(3^m-2,\ 2^n-3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$$

つまり

$$(3^m,\ 2^n)=(3,\ 8),\ (7,\ 4).$$

このうち，m，nが整数であるものは

$$(3^m,\ 2^n)=(3,\ 8)$$

すなわち

$$(m,\ n)=(1,\ 3).$$

(ii) $(3^m-2)(2^n-3)=7$ のとき．

7の正の約数は1と7であるから

$$(3^m-2,\ 2^n-3)=(1,\ 7),\ (7,\ 1)$$

つまり

$$(3^m,\ 2^n)=(3,\ 10),\ (9,\ 4).$$

このうち，m，nが整数であるものは

$$(3^m,\ 2^n)=(9,\ 4)$$

すなわち

$$(m,\ n)=(2,\ 2).$$

(i)，(ii)より

$$(m,\ n)=(\boxed{1},\ \boxed{3}),\ (\boxed{2},\ \boxed{2}).$$

$(m,\ n)=(1,\ 3)$ のとき，$(3^m-2)(2^n-3)=5$ である．

5^k の桁数が70となる条件は

⬅ $a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，$N>0$，p が実数のとき

$\log_a a=1$,

$\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$,

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$,

$p\log_a M=\log_a M^p$.

⬅ $a>1$，$M>0$，$N>0$ のとき

$\log_a M<\log_a N \iff M<N$.

⬅ $3^1=3$，$2^3=8$.

⬅ $3^2=9$，$2^2=4$.

⬅ $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ を満たす．

$$69 \leqq \log_{10} 5^k < 70$$

すなわち

$$69 \leqq k \log_{10} 5 < 70 \qquad \cdots ⑦$$

である．ここで

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$
$$= 1 - 0.3010 = 0.6990$$

であるから，⑦より

$$69 \leqq 0.6990 \times k < 70$$
$$\frac{69}{0.6990} \leqq k < \frac{70}{0.6990}. \qquad \cdots ⑧$$

ここで

$$\frac{69}{0.6990} = 98.7\cdots, \quad \frac{70}{0.6990} = 100.1\cdots$$

であるから，⑧を満たす自然数 k は $k=99$, 100 であり，このうち最小のものは $\boxed{99}$ である．

⬅ N 桁の自然数 M は

$$10^{N-1} \leqq M < 10^N$$

すなわち

$$N-1 \leqq \log_{10} M < N$$

を満たす．