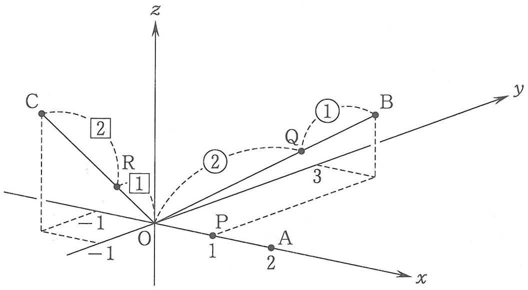
第4問　空間ベクトル



$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 3,\ 1)$，$\overrightarrow{OC}=(-1,\ -1,\ 2)$ である．

線分 OA の中点が P なので

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(2,\ 0,\ 0)=(1,\ 0,\ 0)$$

であり，点 P の座標は $\left(\boxed{1},\ 0,\ 0\right)$ である．

線分 OB を 2：1 に内分する点が Q なので

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}(1,\ 3,\ 1)=\left(\frac{2}{3},\ 2,\ \frac{2}{3}\right)$$

であり，点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}},\ \boxed{2},\ \dfrac{2}{3}\right)$ である．

線分 OC を 1：2 に内分する点が R なので

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(-1,\ -1,\ 2)=\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

であり，点 R の座標は $\left(\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{3}},\ \dfrac{-1}{3},\ \dfrac{\boxed{2}}{3}\right)$ である．

三角形 PQR の重心が G なので

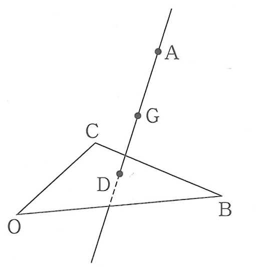
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})\\&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right),\ 0+2+\left(-\frac{1}{3}\right),\ 0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\\&=\left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{9}\right)\end{aligned}$$

であり，点 G の座標は $\left(\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{9}},\ \dfrac{\boxed{5}}{9},\ \dfrac{\boxed{4}}{9}\right)$ である．

三角形の重心の位置ベクトル

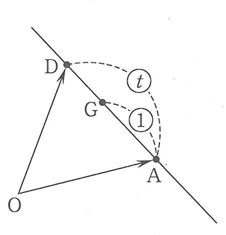
三角形 PQR の重心を G とすると

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$.



点 D は直線 AG と平面 OBC の交点である．

点 D が直線 AG 上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AG}$ と表される．ここで



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{9}\right)-(2,\ 0,\ 0)$$
$$=\left(-\frac{14}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{9}\right)$$

であるから

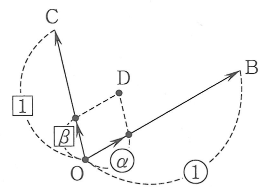
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2,\ 0,\ 0)+t\left(-\frac{14}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{9}\right)$$
$$=\left(-\frac{14}{9}t+2,\ \frac{5}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right) \quad \cdots ①$$

である．

さらに，点Dが平面OBC上にあることから，実数α，βを用いて $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とも表されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\alpha(1,\ 3,\ 1)+\beta(-1,\ -1,\ 2)$$
$$=(\alpha-\beta,\ 3\alpha-\beta,\ \alpha+2\beta) \quad \cdots ②$$

となる．



①，②より

$$\begin{cases} -\dfrac{14}{9}t+2=\alpha-\beta & \cdots ③ \\ \dfrac{5}{9}t=3\alpha-\beta & \cdots ④ \\ \dfrac{4}{9}t=\alpha+2\beta & \cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立ち，これより

$$t=\frac{\boxed{6}}{\boxed{5}},\quad \alpha=\frac{\boxed{4}}{\boxed{15}},\quad \beta=\frac{\boxed{2}}{15}$$

$(2\times④+⑤)\div7$ より $\alpha=\frac{2}{9}t$．$\cdots⑥$

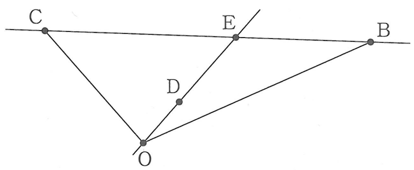
$(3\times⑤-④)\div7$ より $\beta=\frac{1}{9}t$．$\cdots⑦$

これらを③に代入して，$t=\frac{6}{5}$．

これを⑥，⑦に代入して，α，βの値を得る．

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である．また①より

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{2}{15},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{15}\right)$ である．



点Eが直線OD上にあることから，実数sを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots ⑧$$
$$=\frac{4}{15}s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{15}s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots ⑨$$

と表され，さらに点Eが直線BC上にあることから

$$\frac{4}{15}s+\frac{2}{15}s=1 \quad より \quad s=\frac{5}{2}$$

となる．したがって

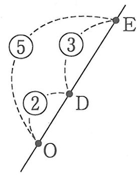
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．点Eが直線BC上にあり

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=u\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表されているとき，$u+v=1$ が成り立つ．

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DE}=1:\left(\frac{5}{2}-1\right)$$
$$=1:\frac{3}{2}$$
$$=2:\boxed{3}$$

である．



また，$s=\dfrac{5}{2}$ を⑨に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となるから，点Eは線分BCを1：2に内分する．

したがって

$$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=1:\boxed{2}$$

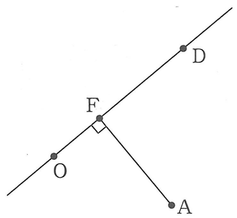
である．

内分点

線分BCを $m:n$ に内分する点をEとすると

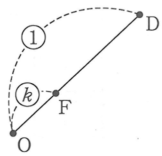
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{m+n}.$$

次に，直線OD上にOと異なる点Fを $\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ となるようにとる．



点Fが直線OD上にあるから，0以外の実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots ⑩$$
$$=\left(\frac{2}{15}k,\ \frac{2}{3}k,\ \frac{8}{15}k\right) \quad \cdots ⑪$$



と表される．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\left(\frac{2}{15}k-2,\ \frac{2}{3}k,\ \frac{8}{15}k\right)$$
$$=\frac{2}{15}(k-15,\ 5k,\ 4k),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{15}(1,\ 5,\ 4)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(\frac{2}{15}\right)^2\{1\times(k-15)+5\times5k+4\times4k\}$$
$$=\left(\frac{2}{15}\right)^2\times3(14k-5).$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=0$ が成り立つから

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

$$14k-5=0$$

より

$$k=\frac{5}{14}.$$

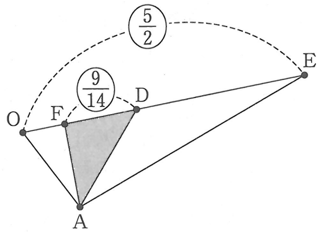
これを⑪に代入すると $\overrightarrow{OF}=\left(\frac{1}{21},\ \frac{5}{21},\ \frac{4}{21}\right)$ であり，点Fの

座標は $\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{21}},\ \frac{\boxed{5}}{21},\ \frac{\boxed{4}}{21}\right)$ である．

⑧と $s=\frac{5}{2}$ より $\overrightarrow{OE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{OD}$ である．

⑩と $k=\frac{5}{14}$ より $\overrightarrow{OF}=\frac{5}{14}\overrightarrow{OD}$ であるから

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF}=\frac{9}{14}\overrightarrow{OD}$ である．



よって

$$\frac{\triangle ADF}{\triangle OAE}=\frac{FD}{OE}=\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{2}}=\frac{9}{35}$$

であるから，三角形 ADF の面積は三角形 OAE の面積の $\frac{\boxed{9}}{\boxed{35}}$

倍である．