第3問　数　列

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{2a_n}{4a_n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad \cdots ①$$

より

$$a_2=\frac{2a_1}{4a_1+1}=\frac{2\cdot 1}{4\cdot 1+1}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}$$

$$a_3=\frac{2a_2}{4a_2+1}=\frac{2\cdot\frac{2}{5}}{4\cdot\frac{2}{5}+1}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{13}}$$

である．

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，①より

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+1}{2a_n}$$
$$=2+\frac{1}{2a_n}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+2$$

すなわち

$$b_{n+1}=\frac{1}{\boxed{2}}b_n+\boxed{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，これは

$$b_{n+1}-\boxed{4}=\frac{1}{2}(b_n-4)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる．さらに

$$b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

であるから，数列 $\{b_n-4\}$ は，初項 $b_1-4=-3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．よって

$$b_n-4=(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち

$$b_n=\boxed{4}-\frac{3}{2^{n-\boxed{1}}}$$
$$=\frac{2^2\cdot 2^{n-1}-3}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n+1}-3}{2^{n-1}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，このことより

$$a_n=\frac{2^{n-\boxed{1}}}{2^{n+\boxed{1}}-3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

⬅ 漸化式
$$b_{n+1}=pb_n+q\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$(p,\ q$ は定数，$p\neq 0,\ 1)$

は

$$\alpha=p\alpha+q$$

を満たす α を用いて

$$b_{n+1}-\alpha=p(b_n-\alpha)$$

と変形できる．

⬅ **等比数列の一般項**

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

⬅ $a_n=\dfrac{1}{b_n}.$

(1)
$$a_n < \frac{251}{1000} \quad \cdots ②$$

と $a_n = \dfrac{1}{b_n}$ より

$$\frac{1}{b_n} < \frac{251}{1000}.$$

$b_n > 0$ であるから

$$b_n > \frac{1000}{251}$$

であり，これと $b_n = 4 - \dfrac{3}{2^{n-1}}$ より

$$4 - \frac{3}{2^{n-1}} > \frac{1000}{251}$$

である．これを変形すると

$$4 - \frac{1000}{251} > \frac{3}{2^{n-1}}$$

$$\frac{4}{251} > \frac{3}{2^{n-1}}$$

$$2^{n+1} > 753$$

となる．さらに，$2^9 = 512$，$2^{10} = 1024$ より，② を満たす最小の自然数 n の値は $\boxed{9}$ である．

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\}$$

$$= 4n - \frac{3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4n - 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \boxed{4}\,n - \boxed{6} + \frac{3}{2^{n-\boxed{1}}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots ③$$

である．

$$c_{n+1} = c_n + b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち

$$c_{n+1} - c_n = b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と $c_1 = 1$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + 4(n-1) - 6 + \frac{3}{2^{(n-1)-1}}$$

$$= 4n - 9 + \frac{3}{2^{n-2}}$$

である．これは $n = 1$ のときも成り立つ．よって

$$c_n = \boxed{4}\,n - \boxed{9} + \frac{3}{2^{n-\boxed{2}}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は，$r \neq 1$ のとき

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

階差数列

数列 $\{c_n\}$ に対して

$$b_n = c_{n+1} - c_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ を $\{c_n\}$ の階差数列という．

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

が成り立つ．

③より

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 4n - 6 + \frac{3}{2^{n-1}}$$

であり，この式における n を $n-1$ に置き換えると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が求まる．

である．さらに

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k c_k=(-c_1+c_2)+(-c_3+c_4)+\cdots+(-c_{2n-1}+c_{2n})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(c_{2k}-c_{2k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_{2k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^{(2k-1)-1}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{4-3\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=4n-\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\boxed{\ 4\ }n-\boxed{\ 4\ }+\frac{1}{\boxed{\ 4\ }^{\,n-\boxed{1}}}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

である．

⬅ $c_{n+1}-c_n=b_n$.

⬅ $b_n=4-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

⬅ $\left(\frac{1}{2}\right)^{(2k-1)-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2(k-1)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$.