第2問　微分法・積分法

$$f(x)=2x^3-3(2k+1)x^2+12kx+1.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-6(2k+1)x+12k\\ &=6\left(x-\boxed{1}\right)\left(x-\boxed{2}k\right) \end{aligned}$$

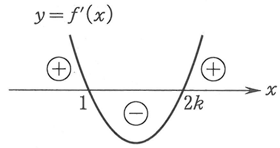
である．

> **導関数**
> $(x^n)'=nx^{n-1}$　（n は自然数）
> $(c)'=0$　（c は定数）．

$k>\dfrac{1}{2}$ より，$2k>1$ であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

> $f'(x)$ の符号は，$y=f'(x)$ のグラフで判断するとよい．



よって，$f(x)$ は

極大値 $f(1)=\boxed{6}k$,

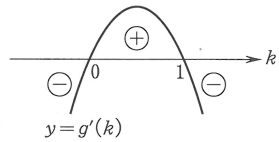
極小値 $f(2k)=\boxed{-8}k^3+\boxed{12}k^2+\boxed{1}$

をとる．

$g(k)=-8k^3+12k^2+1$ とすると，$g'(k)=-24k(k-1)$ であり，$k>\dfrac{1}{2}$ における $g(k)$ の増減は次のようになる．

k	$\left(\dfrac{1}{2}\right)$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(k)$		$+$	0	$-$
$g(k)$		↗	5	↘

> $g'(k)$ の符号は，$y=g'(k)$ のグラフで判断するとよい．



よって，k を $k>\dfrac{1}{2}$ の範囲で変化させると，$g(k)$ は

$k=\boxed{1}$ のとき，最大値 $\boxed{5}$

をとる．

$k=1$ とすると

$$\begin{aligned} f(x)&=2x^3-9x^2+12x+1,\\ f'(x)&=6x^2-18x+12\\ &=6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

であり，$f(x)$ は $x=\boxed{1}$ で極大，$x=\boxed{2}$ で極小となる．

> $f(x)$ の増減表から，$x=1$ で極大，$x=2k=2$ で極小となる．

よって，2点A，Bの座標は A$(1,6)$，B$(2,5)$ である．

> $f(1)=6$，$f(2)=5$.

放物線 $C:y=-x^2+ax+b$ が2点A，Bを通ることから

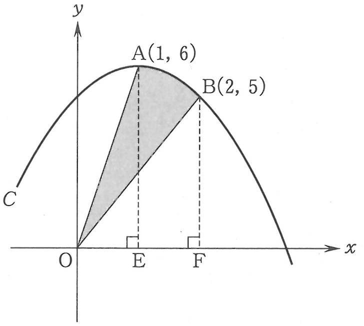
$$\begin{cases} 6=-1+a+b\\ 5=-4+2a+b \end{cases}$$

となる．したがって

$$a=\boxed{2},\quad b=\boxed{5}$$

であり，$C:y=-x^2+2x+5$ である．

線分 OA と線分 OB および放物線 C で囲まれた図形を D とすると，$C: y=-(x-1)^2+6$ より，D は次図の影の部分である．

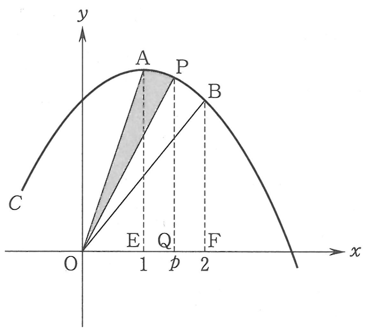


2 点 E，F を E(1, 0)，F(2, 0)，D の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{OAE}+\int_1^2(-x^2+2x+5)\,dx-\triangle\mathrm{OBF}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot6+\int_1^2(-x^2+2x+5)\,dx-\frac{1}{2}\cdot2\cdot5$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x\right]_1^2-2$$
$$=-\frac{1}{3}(2^3-1^3)+(2^2-1^2)+5(2-1)-2$$
$$=\frac{\boxed{11}}{\boxed{3}}$$

である．

放物線 C 上に点 $\mathrm{P}(p,\ -p^2+2p+5)$ をとる．線分 OP が D を面積の等しい二つの図形に分けるので p は $1<p<2$ を満たす．



Q$(p,\ 0)$ とする．

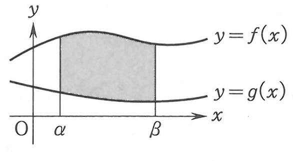
D のうち直線 OP の上側の部分の面積は，上図の影の部分であり，その面積を T とすると

$$T=\triangle\mathrm{OAE}+\int_1^p(-x^2+2x+5)\,dx-\triangle\mathrm{OPQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot6+\int_1^p(-x^2+2x+5)\,dx-\frac{1}{2}p(-p^2+2p+5)$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x\right]_1^p+\frac{1}{2}p^3-p^2-\frac{5}{2}p+3$$

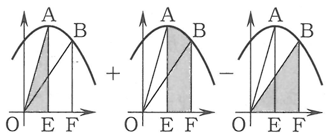
面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



D の面積を次のように求めた．



不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，C は積分定数)

D の面積を求めたときと同様に考えた．また，点 P の y 座標は正である．

$$=-\frac{1}{3}p^3+p^2+5p-\left(-\frac{1}{3}+1+5\right)+\frac{1}{2}p^3-p^2-\frac{5}{2}p+3$$

$$=\frac{1}{6}p^3+\frac{5}{2}p-\frac{8}{3}$$

である．

線分 OP により D が面積の等しい二つの図形に分けられるので，$T=\frac{1}{2}S$ より

$$\frac{1}{6}p^3+\frac{5}{2}p-\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{3}$$

すなわち

$$p^3+15p-\boxed{27}=0 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．

ここで，$h(x)=x^3+15x-27$ とおくと，$h'(x)=3x^2+15>0$ であるから，$h(x)$ は単調増加である．さらに

$$h\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{125}{27}<0,\quad h\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{71}{27}>0$$

であるから，$y=h(x)$ のグラフは x 軸とただ一つの共有点をもち，それは $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$ の部分にある．

① を満たす p は，方程式 $h(x)=0$ の実数解，すなわち $y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標であるから，p の値は不等式 $\frac{4}{3}<p<\frac{5}{3}$ を満たす．よって，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

⬅ $y=h(x)$ のグラフは下図のようになる．