第1問　三角関数，指数関数・対数関数

〔1〕

$$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1,\quad C_1: y=f(x).$$
$$g(x)=2\cos 2x,\qquad\qquad C_2: y=g(x).$$

$f(x)$ は

$$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left\{2\left(x-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right\}+1$$

と変形できるから，C_1 は曲線 $y=2\sqrt{3}\sin 2x$ を x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$，y 軸方向に $\boxed{1}$ だけ平行移動したものである．また，関数 $f(x)$ は $\sin 2x$ と同じ周期をもつから，$f(x)$ の周期のうち正で最小のものは $\frac{2\pi}{2}=\pi$ である．よって，$\boxed{ア}$ には $\boxed{②}$ が，$\boxed{ウ}$ には $\boxed{⑦}$ が当てはまる．

⇐ 曲線 $y=h(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y=h(x-p)+q.$$

⇐ k を正の定数とする．$\sin kx$ の周期のうち正で最小のもの（基本周期）は $\frac{2\pi}{k}$ である．$\cos kx$ も同様．

次に，C_1 上の点 $\mathrm{P}(\theta,\ f(\theta))$ と C_2 上の点 $\mathrm{Q}(\theta,\ g(\theta))$ を考える．

(1)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，PとQが一致するための条件は $f(\theta)=g(\theta)$ であるから

$$2\sqrt{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1=2\cos 2\theta.$$

加法定理を用いて変形すると

$$2\sqrt{3}\left(\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+1=2\cos 2\theta$$

⇐ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

より

$$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right)+1=2\cos 2\theta$$

⇐ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

すなわち

$$\sqrt{\boxed{3}}\sin 2\theta+\cos 2\theta+\boxed{1}=0$$

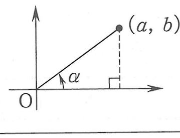
である．さらに，合成すると

$$\boxed{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{\boxed{6}}\right)+1=0 \qquad \cdots ①$$

三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$



より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

が成り立つ．これを，$0\leqq\theta\leqq\pi$ すなわち

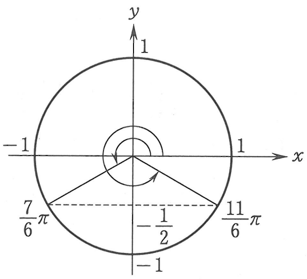
$\frac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq 2\pi+\frac{\pi}{6}$ の範囲において解くと

$$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

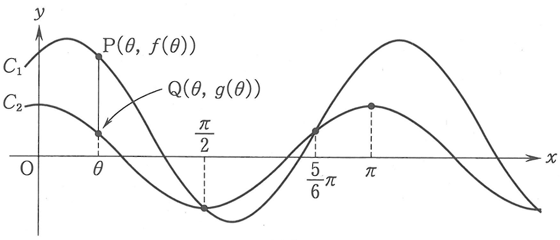
より

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{2}},\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\pi$$

である.



(2)



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき, 上図より, $f(\theta)>g(\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}PQ&=f(\theta)-g(\theta)\\&=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1\end{aligned}$$

① の(左辺)の式.

となる. よって, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ すなわち $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\pi+\frac{\pi}{6}$ の範囲で線分 PQ の長さが最大となるのは

$$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad すなわち\quad \theta=\frac{\pi}{\boxed{6}}$$

のときであり, 最大値は $2\cdot1+1=\boxed{3}$ である.

〔2〕

$$f(x)=\{\log_2(x^2-2x+2)\}^2-4\log_2(x^2-2x+2)^2+12.$$

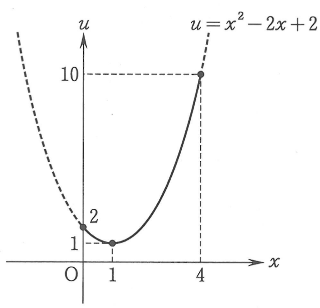
$$(0\leqq x\leqq4)$$

$$x^2-2x+2=\left(x-\boxed{1}\right)^2+\boxed{1}$$

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ であるから, (真数) >0 を満たしている.

であるから, $0\leqq x\leqq4$ のとき x^2-2x+2 のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1}\leqq x^2-2x+2\leqq\boxed{10}$$



である. よって, $t=\log_2(x^2-2x+2)$ とすると, $0\leqq x\leqq4$ のとき t のとり得る値の範囲は

$$\log_2 1 \leqq t \leqq \log_2 10$$

すなわち

$$\boxed{0} \leqq t \leqq \boxed{1} + \log_2 \boxed{5}$$

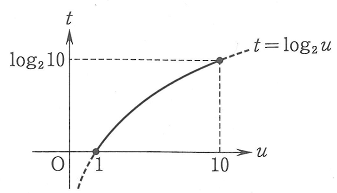
である．また

$$\log_2(x^2-2x+2)^2 = 2\log_2(x^2-2x+2)$$
$$= 2t$$

であるから

$$f(x) = t^2 - 4\cdot 2t + 12$$
$$= t^2 - \boxed{8}\,t + 12$$

と表される．ここで，$g(t)=t^2-8t+12$ とおく．



$\log_2 10 = \log_2(2\cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5$
$= 1 + \log_2 5.$

(1) $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $0 \leqq t \leqq 1+\log_2 5$ における $g(t)$ の最大値である．

$3 < 1+\log_2 5 < 4$ に注意して，$0 \leqq t \leqq 1+\log_2 5$ における

$$g(t) = (t-4)^2 - 4$$

のグラフを考えると，$g(t)$ の最大値は $g(0)=12$ である．このとき $t=0$ より

$$\log_2(x^2-2x+2) = 0$$

すなわち

$$x^2-2x+2 = 1$$

が成り立つ．よって

$$(x-1)^2 = 0$$

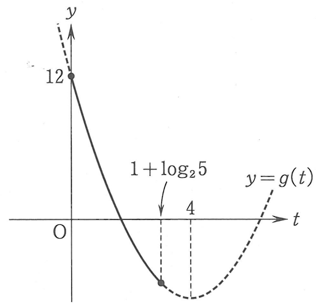
より

$$x = 1$$

である．

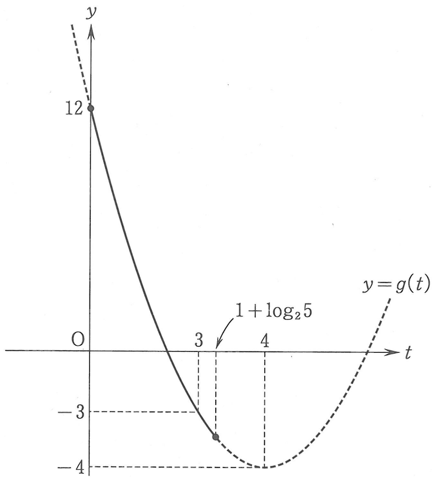
したがって，$f(x)$ は $x=\boxed{1}$ のとき最大値 $\boxed{12}$ をとる．

$2^2 < 5 < 2^3$ より $\log_2 2^2 < \log_2 5 < \log_2 2^3$，
すなわち $2 < \log_2 5 < 3$.



$t=\log_2(x^2-2x+2)$.

(2) 方程式 $f(x)=k$ が $0 \leqq x \leqq 4$ において実数解をもつための整数 k の条件は，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲に整数 k が含まれることである．$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1+\log_2 5$ における $g(t)$ のとり得る値の範囲であるから，次図の $y=g(t)$ のグラフから，k の値が求まる．



すなわち，整数 k は

$$k=-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 11,\ 12$$

であり，全部で $12-(-3)+1=\boxed{16}$ 個の値がある．よって，最小の k の値は $\boxed{-3}$ である．ここで，方程式

$$f(x)=-3$$

すなわち

$$g(t)=-3$$

⬅ $f(x)=g(t)$.

を解くと，$t=3$ であり

$$\log_2(x^2-2x+2)=3$$

⬅ $t=\log_2(x^2-2x+2)$.

$$x^2-2x+2=2^3$$

$$x^2-2x-6=0$$

となるから，$0\leqq x\leqq 4$ より

$$x=\boxed{1}+\sqrt{\boxed{7}}$$

である．