第5問　確率分布と統計的な推測

(1)　1個のさいころを1回投げるとき，3の倍数の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．よって，1個のさいころを9回投げるとき，3の倍数の目が出る回数を X とすると，確率変数 X の確率分布は

$$P(X=r)={}_9\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{9-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

であるから，X は二項分布 $B\left(\boxed{9},\ \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\right)$ に従う．よって，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=9\cdot\frac{1}{3}=\boxed{3}$$

であり，分散 $V(X)$ は

$$V(X)=9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{2}$$

である．

(2)　1個のさいころを36回投げたとき，確率変数

$$Y_k\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 36)$$

は，k 回目に出た目の数を a_k として

$$Y_k=\begin{cases}0 & (a_k\text{ が偶数のとき})\\ a_k & (a_k\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

と定められるから，Y_k の確率分布表は次のようになる．

Y_k	0	1	3	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

よって，Y_k の期待値 $E(Y_k)$ は

$$E(Y_k)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

であり，分散 $V(Y_k)$ は

$$V(Y_k)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\boxed{43}}{\boxed{12}}$$

である．

さらに，確率変数 Y を

$$Y=Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{36}$$

と定めると，Y は1個のさいころを36回投げるときの出る奇数

さいころの目の数1～6のうち，3の倍数であるものは3と6の2通りである．

二項分布

n を自然数とする．

確率変数 X のとり得る値が

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

であり，X の確率分布が

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとき，X の確率分布を二項分布といい，$B(n,\ p)$ で表す．

二項分布の期待値(平均)，分散

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると X の期待値(平均) $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X)=np$$

$$V(X)=npq$$

である．

期待値(平均)，分散

確率変数 X のとり得る値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とすると，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k.$$

また，X の分散 $V(X)$ は $E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k\quad\cdots(*)$$

または

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2.\quad\cdots(**)$$

ここでは (**) を用いた．

a_k が偶数のときは $Y_k=0$ である．

の目の数の総和を表すので，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

この確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ は

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{36}) \\ &= E(Y_1)+E(Y_2)+E(Y_3)+\cdots+E(Y_{36}) \\ &= 36E(Y_1) \\ &= 36\cdot\frac{3}{2} \\ &= \boxed{54} \end{aligned}$$

である．また，確率変数 Y_1，Y_2，Y_3，…，Y_{36} は互いに独立であるから，Y の分散 $V(Y)$ は

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{36}) \\ &= V(Y_1)+V(Y_2)+V(Y_3)+\cdots+V(Y_{36}) \\ &= 36V(Y_1) \\ &= 36\cdot\frac{43}{12} \\ &= \boxed{129} \end{aligned}$$

である．

(3) 1個のさいころを721回投げる．$k=1, 2, 3, \cdots, 721$ に対して，k 回目に出る目の数を b_k とする．$k=1, 2, 3, \cdots, 720$ に対して

$$b_k \neq b_{k+1} \qquad \cdots ①$$

である確率は，k の値に関係なく $\frac{5}{6}$ である．

よって，① を満たす k の個数を W とすると，確率変数 W の確率分布は

$$P(W=r) = {}_{720}\mathrm{C}_r\left(\frac{5}{6}\right)^r\left(\frac{1}{6}\right)^{720-r} \quad (r=0, 1, 2, \cdots, 720)$$

であるから，W は二項分布 $B\left(720, \frac{5}{6}\right)$ に従う．

このとき，W の平均 $E(W)$ は

$$E(W) = 720\cdot\frac{5}{6} = 600$$

であり，標準偏差 $\sigma(W)$ は

$$\sigma(W) = \sqrt{720\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}} = 10$$

である．試行回数720は十分大きいと考えられるので，W は近似的に平均 $\boxed{600}$，標準偏差 $\boxed{10}$ の正規分布 $N(600, 10^2)$ に従う．

さらに

$$Z = \frac{W-600}{10}$$

期待値(平均)の性質

X，Y は確率変数，a，b は定数とする．このとき

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

が成り立つ．

分散の性質

X，Y は確率変数，a，b は定数とする．X と Y が互いに独立であるとき

$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

が成り立つ．

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う．ただし，$q=1-p$ である．

とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

したがって，W が 610 以下となる確率 $P(W \leqq 610)$ は

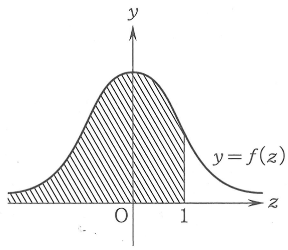
$$\begin{aligned} P(W \leqq 610) &= P(Z \leqq 1) \\ &= P(Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 \\ &= 0.8413 \\ &\fallingdotseq \boxed{0}.\boxed{84} \end{aligned}$$

である．

標準正規分布

平均 0，標準偏差 1 の正規分布 $N(0,\ 1)$ を，標準正規分布という．

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X に対し，確率変数 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$（ただし，$q=1-p$）は，$n$ が十分大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．



標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

で，曲線 $y=f(z)$ は y 軸に関して対称であるから

$$P(Z \leqq 0)=0.5$$

が成り立つ．