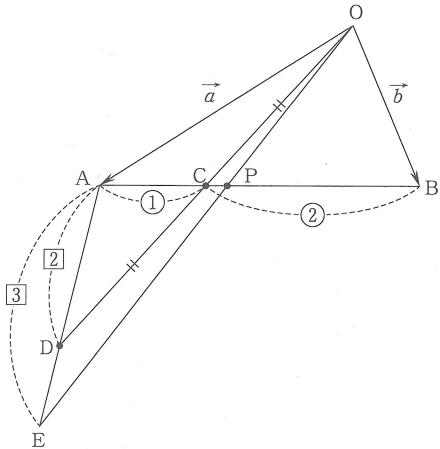


第4問 ベクトル



Cは辺ABを1:2に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \frac{2\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB}}{1+2} \\ &= \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \end{array} \vec{a} + \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \end{array} \vec{b}.\end{aligned}$$

Dは線分OCを2:1に外分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \end{array} \overrightarrow{OC} \\ &= \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \end{array} \vec{a} + \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \end{array} \vec{b}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AD} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OD} \\ &= -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right) \\ &= \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \end{array} \vec{a} + \vec{b}.\end{aligned}$$

直線OEと直線ABの交点Pは直線OE上にあるから、実数sを用いて

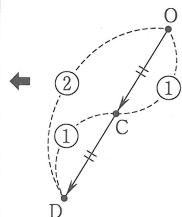
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s \overrightarrow{OE} \\ &= \frac{3}{2} s \vec{a} + s \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表される。

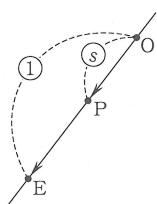
Pは直線AB上にあるから、実数tを用いて

内分点
線分ABをm:nに内分する点をPとする

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$



ベクトルの差
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

… ②

と表される。

①, ②より

$$\frac{3}{2}s\vec{a} + s\vec{b} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

が成り立ち、さらに $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ であるから

$$\begin{cases} \frac{3}{2}s = 1-t, \\ s = t. \end{cases}$$

これを解いて

$$s = \frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}, \quad t = \frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}.$$

 $|\overrightarrow{OA}| = 5$, $|\overrightarrow{OB}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{7}$ のとき

$$\begin{aligned}(2\sqrt{7})^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - \boxed{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2\end{aligned}$$

より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{3}$ であり

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 \cdot 3^2 - 3^2} \\ &= \boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}.\end{aligned}$$

点 Q は直線 OE 上にあるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OE}$$

$$= \frac{3}{2}k\vec{a} + k\vec{b}$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{2}k\vec{a} + (k-1)\vec{b}.\end{aligned}$$

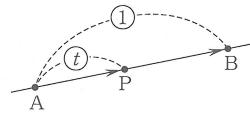
 $\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{OE}$ より、 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{OE} = \boxed{0}$ であるから

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{3}{2}k\vec{a} + (k-1)\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} \right) &= 0 \\ \{3k\vec{a} + 2(k-1)\vec{b}\} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b}) &= 0 \\ 9k|\vec{a}|^2 + 6(2k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + 4(k-1)|\vec{b}|^2 &= 0\end{aligned}$$

$$9k \cdot 5^2 + 6(2k-1) \cdot 3 + 4(k-1) \cdot 3^2 = 0$$

$$25k + 2(2k-1) + 4(k-1) = 0$$

$$33k - 6 = 0$$



$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

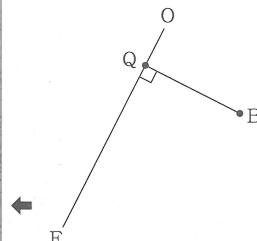
$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

← $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ が実数であり,
 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \times \vec{b}$ のとき

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha' \text{かつ } \beta = \beta'.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\ = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2. \end{array} \right.$$



$$\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}.$$

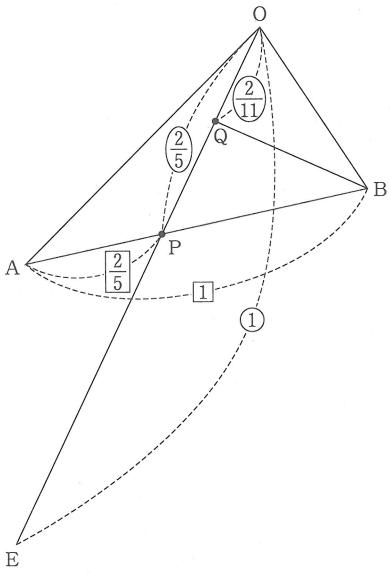
垂直条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{のとき} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \end{array} \right.$$

← 両辺を 2^2 倍した。

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, |\vec{b}| = 3. \end{array} \right.$$

$$k = \frac{2}{11}.$$



◀ $s = t = \frac{2}{5}, \quad k = \frac{2}{11}.$

以上より

$$\begin{aligned}\triangle BPQ &= \frac{PQ}{OP} \cdot \triangle OBP \\ &= \frac{PQ}{OP} \cdot \frac{BP}{AB} \cdot \triangle OAB \\ &= \frac{6}{11} \cdot \frac{3}{5} \cdot 3\sqrt{6} \\ &= \frac{54}{55} \sqrt{\frac{6}{5}}.\end{aligned}$$

◀ $\frac{PQ}{OP} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{11}}{\frac{2}{5}} = \frac{11-5}{11} = \frac{6}{11},$
 $\frac{BP}{AB} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$