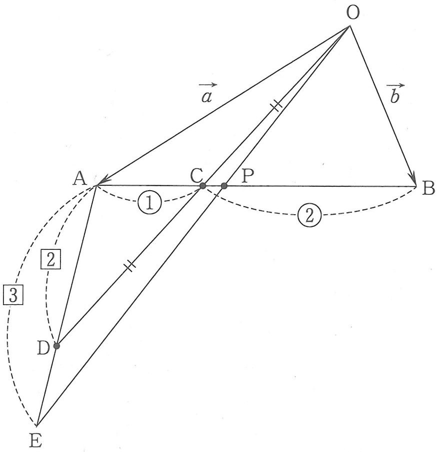
第4問　ベクトル



Cは辺ABを1:2に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+2}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\vec{b}.$$

内分点

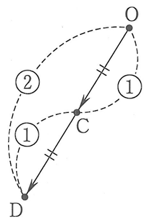
線分ABを $m:n$ に内分する点をPとすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

Dは線分OCを2:1に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OD}=\boxed{2}\,\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{b}.$$



$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

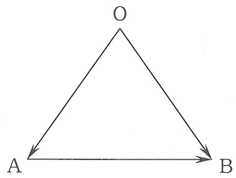
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\vec{a}+\vec{b}.$$

ベクトルの差

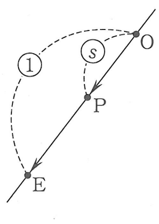


$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

直線OEと直線ABの交点Pは直線OE上にあるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{3}{2}s\vec{a}+s\vec{b} \qquad \cdots ①$$

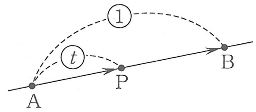


と表される．

Pは直線AB上にもあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$
$$=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

と表される．



$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ より
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$.
$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

①，②より

$$\frac{3}{2}s\vec{a}+s\vec{b}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

が成り立ち，さらに $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}s=1-t,\\ s=t.\end{cases}$$

α，β，α'，β' が実数であり，
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ のとき
$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$
$\Longleftrightarrow$ $\alpha=\alpha'$　かつ　$\beta=\beta'$.

これを解いて

$$s=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}},\quad t=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}.$$

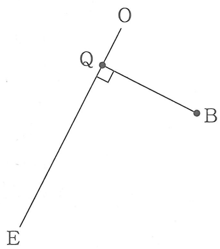
$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OB}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{7}$ のとき

$$(2\sqrt{7})^2=|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2-\boxed{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$
$$=3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$$

$$\left\{\begin{aligned}&|\vec{b}-\vec{a}|^2\\ &=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\ &=\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}\\ &=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2.\end{aligned}\right.$$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{3}$ であり

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot3^2-3^2}$$
$$=\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}.$$



点Qは直線OE上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OE}$$
$$=\frac{3}{2}k\vec{a}+k\vec{b}$$

$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

と表される．このとき

$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{3}{2}k\vec{a}+(k-1)\vec{b}.$$

$\overrightarrow{BQ}\perp\overrightarrow{OE}$ より，$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{OE}=\boxed{0}$ であるから

垂直条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$$\left\{\frac{3}{2}k\vec{a}+(k-1)\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=0$$
$$\left\{3k\vec{a}+2(k-1)\vec{b}\right\}\cdot\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$$

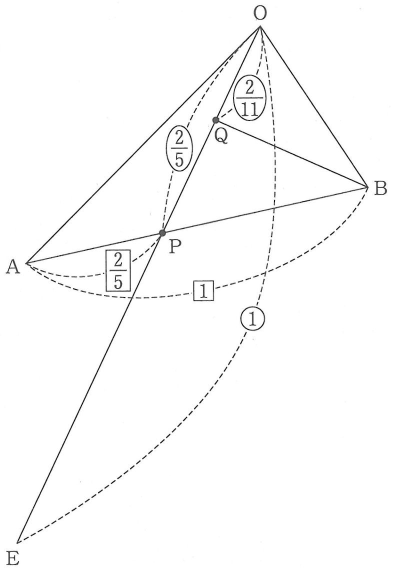
両辺を 2^2 倍した．

$$9k|\vec{a}|^2+6(2k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+4(k-1)|\vec{b}|^2=0$$
$$9k\cdot5^2+6(2k-1)\cdot3+4(k-1)\cdot3^2=0$$

$|\vec{a}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$|\vec{b}|=3$.

$$25k+2(2k-1)+4(k-1)=0$$
$$33k-6=0$$

$$k=\frac{\boxed{2}}{\boxed{11}}.$$



以上より

$$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}\cdot\triangle\mathrm{OBP}$$

$$=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}}\cdot\triangle\mathrm{OAB}$$

$$=\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{5}\cdot 3\sqrt{6}$$

$$=\frac{\boxed{54}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{55}}.$$

$s=t=\frac{2}{5},\quad k=\frac{2}{11}.$

$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{11}}{\frac{2}{5}}=\frac{11-5}{11}=\frac{6}{11},$

$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$