第3問　数　列

等差数列 $\{a_n\}$ の初項が p，公差が 2 であるとき，一般項は

$$a_n = p + (n-1)\cdot 2$$

である．

$a_{10}=21$ より

$$p+18=21$$

であるから

$$p=\boxed{3}$$

であり

$$\begin{aligned} a_n &= 3+(n-1)\cdot 2 \\ &= \boxed{2}\,n+\boxed{1} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

である．

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a+(n-1)d.$$

(1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n}{2}\{3+(2n+1)\} \\ &= n^{\boxed{2}}+\boxed{2}\,n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

である．

等差数列の和

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

また，① より

$$\begin{aligned} a_k-21 &= (2k+1)-21 \\ &= 2(k-10) \end{aligned}$$

① より，$a_k=2k+1$.

であるから

$$|a_k-21| = \begin{cases} -2(k-10) & (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10 \text{ のとき}) \\ 2(k-10) & (k=11,\ 12,\ 13,\ \cdots,\ 20 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$ のとき

$$2(k-10) \leqq 0$$

より

$$|2(k-10)| = -2(k-10).$$

$k=11,\ 12,\ 13,\ \cdots,\ 20$ のとき

$$2(k-10)>0$$

より

$$|2(k-10)| = 2(k-10).$$

となり

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20}|a_k-21| &= \sum_{k=1}^{10}\{-2(k-10)\}+\sum_{k=11}^{20}2(k-10) \\ &= -2\{(-9)+(-8)+(-7) \\ &\qquad +\cdots+(-1)+0\}+2(1+2+3+\cdots+10) \\ &= 2(9+8+7+\cdots+1)+2(1+2+3+\cdots+9)+2\cdot 10 \\ &= 4(1+2+3+\cdots+9)+20 \\ &= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(9+1)+20 \\ &= \boxed{200} \end{aligned}$$

である．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$.

ここでは $n=9$ とした．

(2)　等比数列 $\{b_n\}$ の初項が 2，公比が r であるとき，一般項は

$$b_n = 2r^{n-1}$$

である．

$b_4=16$ より

$$2r^3=16$$

等比数列の一般項

初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = br^{n-1}.$$

$$r^3=8$$

が得られ，これを変形して

$$r^3-8=0$$

$$(r-2)(r^2+2r+4)=0$$

$$r=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i.$$

r は実数であるから，$r=\boxed{2}$.

よって

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=\boxed{2}^{n+1}-\boxed{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

したがって，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である．

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{rl} S_n= & 3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+9\cdot 2^4+\cdots+(2n+1)\cdot 2^n \\ -\big)\ 2S_n= & \qquad\quad 3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n+(2n+1)\cdot 2^{n+1} \\ \hline S_n-2S_n= & 3\cdot 2+(2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+2\cdot 2^4+\cdots+2\cdot 2^n)-(2n+1)\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

$$=6+\left(2\cdot 2^2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)-(2n+1)\cdot 2^{n+1}$$

$$=6+8\cdot 2^{n-1}-8-(2n+1)\cdot 2^{n+1}$$

$$=2\cdot 2^{n+1}-(2n+1)\cdot 2^{n+1}-2$$

$$=\left(\boxed{-2}n+\boxed{1}\right)\boxed{2}^{n+1}-\boxed{2}.$$

上式は $n=1$ でも成立する．

よって

$$S_n=\left(\boxed{2}n-\boxed{1}\right)\boxed{2}^{n+1}+\boxed{2}\qquad\cdots②$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．

ここで

S_n を 100 で割った余りが 2　　$\cdots(*)$

となる条件は

S_n-2 が $100\ (=2^2\cdot 5^2)$ の倍数

すなわち

$$\begin{cases} S_n-2 \text{ が } 2^2 \text{ の倍数} & \cdots(\mathrm{i}) \\ S_n-2 \text{ が } 5^2 \text{ の倍数} & \cdots(\mathrm{ii}) \end{cases}$$

である．

② より

$$S_n-2=(2n-1)\cdot 2^{n+1}.$$

(i) はすべての自然数 n に対して成立する．

← **等比数列の和**

初項 b，公比 $r\ (\neq 1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和は

$$b\frac{(r^n-1)}{r-1}.$$

← $a_k=2k+1$，$b_k=2^k$.

← $r=2$.

← $2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+2\cdot 2^4+\cdots+2\cdot 2^n$ は初項 $2\cdot 2^2$，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列の和．

← $8\cdot 2^{n-1}=2^3\cdot 2^{n-1}=2^{3+(n-1)}$
$=2^{n+2}=2\cdot 2^{n+1}$.

(ii) が成立する条件は，「$2n-1$ が 5^2 の倍数」であり，これを満たす自然数 n のなかで最小のものは

$$2n-1=5^2 \quad より \quad n=13.$$

したがって，(*) を満たす自然数 n のなかで最小のものは

$\boxed{13}$ である．