第２問　微分法・積分法

$$f(x)=x^3-x.$$

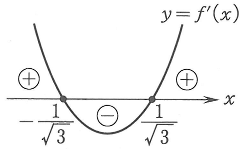
(1)　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{1}$$
$$=3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

> **導関数**
> $(x^n)'=nx^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$,
> $(c)'=0$　(c は定数).

であるから，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗



$f'(x)$ の符号は $y=f'(x)$ のグラフを描くとわかりやすい．

よって，$f(x)$ は

$$x=\frac{\boxed{-}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\ \text{において極大値}\ \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

$$x=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\ \text{において極小値}\ \frac{\boxed{-2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

をとる．

(2)　$C_1:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

> **接線の方程式**
> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における曲線の接線の傾きは
> $$f'(t)$$
> であり，接線の方程式は
> $$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$

すなわち

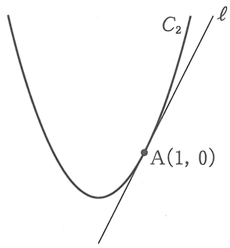
$$y=2(x-1)+0$$
$$y=\boxed{2}x-\boxed{2}$$

である．

　$C_2:y=g(x)$ が点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ において直線 ℓ に接するとき

$$g(1)=0,\quad g'(1)=2$$

$g(x)=x^2+px+q$, $g'(x)=2x+p$.



すなわち

$$1+p+q=0,\quad 2+p=2$$

が成り立つ．これより

$$p=\boxed{0},\quad q=-\boxed{1}$$

である．よって $g(x)=x^2-1$ である．

(3)　曲線 C_1 と放物線 C_2 の点 A 以外の共有点 B の x 座標を求める．

$$f(x)-g(x)=0$$

より

このxの方程式の実数解が C_1 と C_2 の共有点の x 座標である．

$$x^3-x^2-x+1=0$$
$$(x-1)^2(x+1)=0$$
$$x=1,\ -1.$$

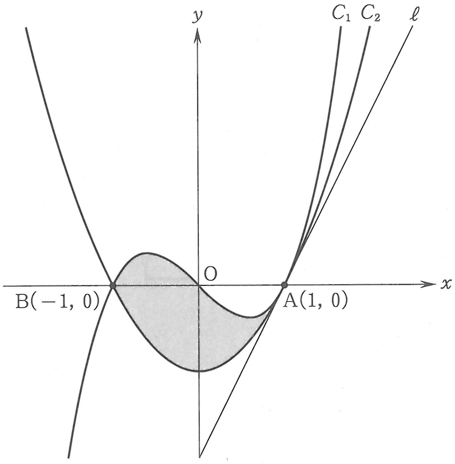
C_1, C_2 は $(1,\ 0)$ において共通接線をもつので，左の方程式は $x=1$ を重解にもつ．

これより点Bの x 座標は -1 である．また，Bは C_2 上にあるから，Bの y 座標は $(-1)^2-1=0$ である．よって，Bの座標は

$$\left(\boxed{-1},\ \boxed{0}\right)$$

である．

← $C_2: y=x^2-1$.



また，$-1 \leqq x \leqq 1$ において

$$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+1) \geqq 0$$

であるから，曲線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積は

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

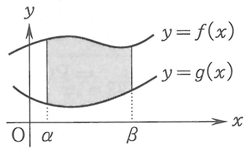
である．

(4)　$-1<t<0$ のとき，直線PQと x 軸の交点をHとする．四角形APBQの面積を S とする．

面積

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および2直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



積分

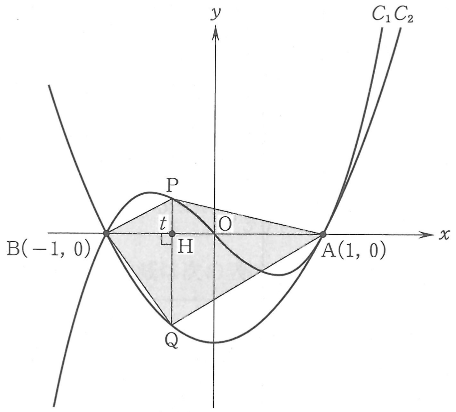
$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

($n=0, 1, 2, \cdots$, C は積分定数)

であり，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=F(\beta)-F(\alpha).$$



$$\begin{aligned}
S&=\triangle \mathrm{APQ}+\triangle \mathrm{BPQ}\\
&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot \mathrm{AH}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot \mathrm{BH}\\
&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot (\mathrm{AH}+\mathrm{BH})\\
&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot \mathrm{AB}\\
&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot 2\\
&=\mathrm{PQ}\\
&=f(t)-g(t)\\
&=t^3-t^2-t+1
\end{aligned}$$

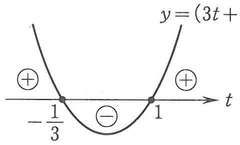
⬅ $-1<t<0$ において
$f(t)-g(t)=(t-1)^2(t+1)>0.$

である．S を t で微分すると

$$\begin{aligned}
S'&=3t^2-2t-1\\
&=(3t+1)(t-1)
\end{aligned}$$

であるから，$-1<t<0$ における S の増減は次の表のようになる．

⬅



t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	(0)
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

⬅ $t=-\frac{1}{3}$ のとき
$S=\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{32}{27}.$

よって，S は $t=\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{27}}$ をとることがわかる．