第 1 問　三角関数，指数関数・対数関数

〔1〕

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x\right).$$

(1)
$$f(0)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin 0\cos 0+\cos^2 0\right)=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{0}$$

である．

← $\sin 0=0$，$\cos 0=1$．

← $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$．

(2)　2 倍角の公式より

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{\boxed{2}},\qquad \cos^2 x=\frac{\boxed{1}+\cos 2x}{\boxed{2}}$$

であるから，これらを用いて

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{6}$$

と変形できる．

← **2 倍角の公式**

$\sin 2x=2\sin x\cos x.$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1.$

さらに，三角関数の合成により

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

となることから，$f(x)$ は

$$f(x)=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{\boxed{6}}\right)+\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$$

と変形できる．

← **三角関数の合成**

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

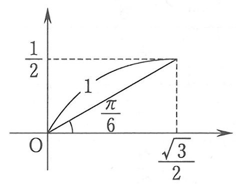
$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha).$

ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり，

α は

$\cos\alpha=\frac{a}{r}$，　$\sin\alpha=\frac{b}{r}$

を満たす．



(3)　$f(x)=\frac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1\qquad\cdots(☆)$$

である．

まず，$x\geqq 0$ において (☆) を満たす x の値を調べる．

$2x+\frac{\pi}{6}\geqq\frac{\pi}{6}$ であるから

$$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \cdots$$

すなわち

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \cdots$$

である．

← (☆) の解は，n を整数として

$$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

すなわち

$$x=\frac{\pi}{6}+n\pi$$

と表される．

よって，$0\leqq x\leqq k$ において $f(x)=\frac{1}{2}$ を満たす実数 x が

ちょうど2個存在するような k のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{7}}{\boxed{6}}\pi \leqq k < \frac{\boxed{13}}{\boxed{6}}\pi$$

である．

← $0 \leqq x \leqq k$ には，小さい方から2番目の $\frac{7}{6}\pi$ を含み，3番目の $\frac{13}{6}\pi$ は含まない．

［2］

$$4^{x+y} - 34 \cdot 2^{x+y} + 64 \leqq 0. \qquad \cdots ①$$

$$\log_{10}(y-x) + \log_{10}(y-x-3) \leqq 1. \qquad \cdots ②$$

(1) $2^{x+y} = A$ より，① の左辺は

$$\begin{aligned} &\left(2^{x+y}\right)^2 - 34 \cdot 2^{x+y} + 64 \\ &= A^2 - 34A + 64 \\ &= \left(A - \boxed{2}\right)\left(A - \boxed{32}\right) \end{aligned}$$

← $4^{x+y} = \left(2^2\right)^{x+y} = \left(2^{x+y}\right)^2$.

と表される．したがって，① は

$$(A-2)(A-32) \leqq 0$$

$$2 \leqq A \leqq 32$$

$$2^1 \leqq 2^{x+y} \leqq 2^5$$

となり，底の2は1より大きいので

$$\boxed{1} \leqq x+y \leqq \boxed{5} \qquad \cdots (*)$$

を得る．

← $a > 1$ のとき
$a^p \leqq a^q \iff p \leqq q$.

(2) $y - x = B$ とおくと，② は

$$\log_{10}B + \log_{10}(B-3) \leqq 1 \qquad \cdots ②'$$

と表される．

真数は正であるから，②′ より

$$B > 0 \quad かつ \quad B - 3 > 0$$

すなわち

$$B > 3. \qquad \cdots ③$$

← **対数**
$a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0$ のとき
$a^x = M \iff x = \log_a M$.

M を対数 $\log_a M$ の真数という．真数は正である．

③ のもとで ②′ を変形すると

$$\log_{10}B(B-3) \leqq \log_{10}10$$

となる．さらに，底の10は1より大きいので

$$B(B-3) \leqq 10$$

を得る．これより

$$(B+2)(B-5) \leqq 0$$

$$-2 \leqq B \leqq 5. \qquad \cdots ④$$

← **対数の性質**
$a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$ のとき
$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$,
$\log_a a = 1$.

$a > 1,\ M > 0,\ N > 0$ のとき
$\log_a M \leqq \log_a N \iff M \leqq N$.

③ かつ ④ より

$$3 < B \leqq 5$$

すなわち

$$\boxed{3} < y - x \leqq \boxed{5}. \qquad \cdots (**)$$

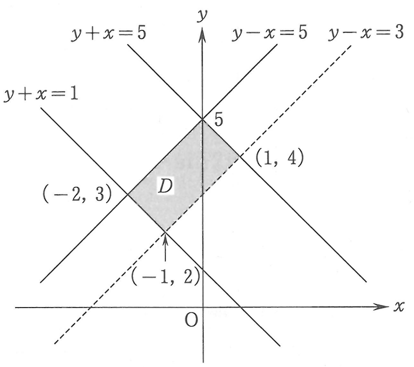
を得る．

(3)
$$\frac{2^y}{4^x}=\frac{2^y}{2^{2x}}=2^{y-2x}$$

であり，底の 2 は 1 より大きいので，「実数 x，y が ①，② をともに満たしながら変化するとき，$\dfrac{2^y}{4^x}$ が最大」となるのは「実数 x，y が (*)，(**) をともに満たしながら変化するとき，$y-2x$ が最大」となるときである．

したがって，座標平面上で，(*) かつ (**) の表す領域を D，$y-2x=p$（p は実数）として，直線 $y-2x=p$ が D と共有点をもつような p の値の最大値を調べればよい．

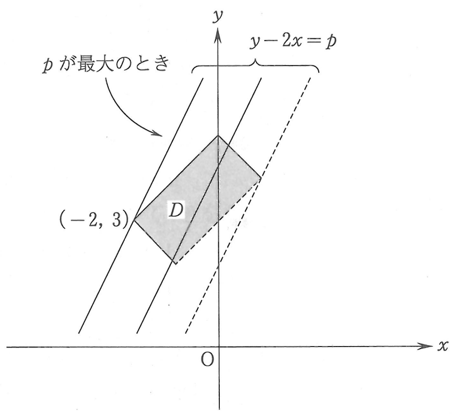
領域 D は下図の網掛けの部分である．ただし，境界は直線 $y-x=3$ 上を含まず，他は含む．



$y-2x=p$ すなわち $y=2x+p$ は，傾き 2，y 切片 p の直線を表すので，下図より，この直線が点 $(-2,\ 3)$ を通るとき p は最大値

$$p=3-2\cdot(-2)=7$$

をとる．



$\Leftarrow$ $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$.

よって，2^{y-2x} すなわち $\dfrac{2^y}{4^x}$ は

$$\text{最大値}\ 2^7 = \boxed{128}$$

をとり，このときの x，y の値は $x = \boxed{-2}$，$y = \boxed{3}$ である．