第5問　確率分布と統計的な推測

(1) スイッチを1回入れると，ランプLが赤色に光る確率が $\frac{1}{3}$，緑色に光る確率が $\frac{2}{3}$ である．3回の操作を行ったとき，ランプLが赤色に光った回数を X とすると，確率変数 X の確率分布は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{3-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であり，X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う．よって

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{\boxed{2}}{\boxed{9}},$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{\boxed{1}}{\boxed{27}}$$

である．

X の平均(期待値) $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{3}=\boxed{1},$$

$$V(X)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．

また，ランプLが緑色に光った回数を Y とすると，確率変数 Y の確率分布は

$$P(Y=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{3-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であり，Y は二項分布 $B\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$ に従う．よって，Y の平均 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ は

$$E(Y)=3\cdot\frac{2}{3}=\boxed{2},$$

$$V(Y)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．

(2) n 回の操作を行ったとき，X は二項分布 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$ に従い，

$E(X)=\frac{n}{3}$，$V(X)=\frac{2}{9}n$ である．確率変数 W を $W=4X+1$ と定めると，確率変数 W の平均 $E(W)$ は

$$E(W)=4E(X)+1=4\cdot\frac{n}{3}+1=\frac{4n}{3}+1$$

である．$E(W)$ が37であるとき

二項分布

n を自然数とする．

確率変数 X のとり得る値が

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

であり，X の確率分布が

$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

であるとき，X の確率分布を二項分布といい，$B(n,\ p)$ で表す．

二項分布の平均(期待値)，分散

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると，X の平均(期待値) $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$E(X)=np$,

$V(X)=npq$

である．

平均の性質

確率変数 X と定数 a，b に対して

$E(aX+b)=aE(X)+b$

が成り立つ．

$$\frac{4n}{3}+1=37$$

より

$$n=\boxed{27}$$

であるから，このときの W の分散 $V(W)$ は

$$V(W)=4^2V(X)=16\cdot\frac{2}{9}\cdot 27=\boxed{96}$$

である．

分散の性質

確率変数 X と定数 a，b に対して

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

が成り立つ．

(3) A工場で生産されたランプの寿命の平均は50時間，標準偏差は20時間である．この母集団から大きさ100の無作為標本を抽出するとき，100は十分大きいと考えられ，$\frac{20^2}{100}=4$ より標本平均 m は近似的に正規分布 $N\left(\boxed{50},\ \boxed{4}\right)$ に従う．

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ は，n が大きいとき，近似的に正規分布

$N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる．

$Z=\frac{m-50}{2}$ とすると，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，$m\leqq 56$ より

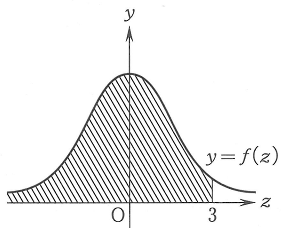
$$2Z+50\leqq 56$$

$$Z\leqq 3$$

であるから，$m\leqq 56$ となる確率 $P(m\leqq 56)$ は

$$\begin{aligned}P(m\leqq 56)&=P(Z\leqq 3)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 3)\\&=0.5+0.4987\\&=0.9987\end{aligned}$$

である．$\boxed{テ}$ には $\boxed{③}$ が当てはまる．



標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

で，曲線 $y=f(z)$ は y 軸に関して対称であるから

$$P(Z\leqq 0)=0.5$$

が成り立つ．

(4) B工場で生産されたランプについて，無作為に900個のランプを選んで調べたところ，90個の不良品が存在した．これより，標本比率 R は $\frac{90}{900}=0.\boxed{10}$ であり

$$1.96\times\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{900}}=0.0196$$

である．900は十分大きいと考えてよいから，B工場で生産されたランプの不良品の割合 p を信頼度95%で推定すると

$$0.1-0.0196\leqq p\leqq 0.1+0.0196$$

より

$$0.0804\leqq p\leqq 0.1196$$

すなわち

$$0.\boxed{080}\leqq p\leqq 0.\boxed{120}$$

である．

母比率の推定

標本の大きさ n が十分大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する信頼度95%の信頼区間は

$$R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

である．