## 第４問　ベクトル

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=m\times1\times\frac{1}{2}=\frac{m}{\boxed{2}}$$

である．

> **内積**
> $\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

辺 BC を 3:1 に内分する点が D であるから

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\vec{b}+\frac{\boxed{3}}{4}\vec{c}\qquad\cdots①$$

である．

> **内分点**
> 点 P が線分 AB を $m:n$ に内分するとき
> $$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

三角形 OAB の重心が G であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{1}}{3}\vec{b}\qquad\cdots②$$

である．

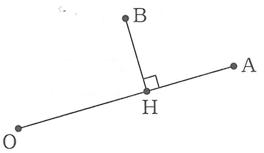
> **重心**
> 三角形 OAB の重心を G とすると
> $$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$$

H は直線 OA 上にあるから，$k$ を実数として

$$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}$$

と表される．さらに，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$ であることから

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=\boxed{0}$$




が成り立つ．これは

$$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$$
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$k\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

と変形できるから

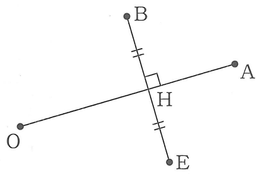
$$k=\frac{\frac{m}{2}}{m^2}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}m}$$

← $|\vec{a}|=m$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{m}{2}$.

である．

直線 OA に関して点 B と対称な点を E とすると，点 H は線分 BE の中点であり

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$




が成り立つから

$$\overrightarrow{OE}=\boxed{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}$$

である．これと

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2m}\vec{a}$$

← $\overrightarrow{OH}=k\vec{a}=\frac{1}{2m}\vec{a}$.

より

$$\overrightarrow{OE}=2\times\frac{1}{2m}\vec{a}-\vec{b}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{m}\vec{a}-\vec{b} \qquad \cdots ③$$

である．

直線 DG 上の点 P は，$t$ を実数として

$$\overrightarrow{OP}=(\boxed{1}-t)\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OG}$$

と表される．これと ①，② より

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{t}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{3}+t}{\boxed{12}}\vec{b}+\frac{\boxed{3}(\boxed{1}-t)}{\boxed{4}}\vec{c} \qquad \cdots ④$$

となる．

直線 EC 上の点 Q は，$u$ を実数として

$$\overrightarrow{OQ}=(\boxed{1}-u)\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OC}$$

と表される．これと ③ より

$$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\left(\frac{1}{m}\vec{a}-\vec{b}\right)+u\vec{c}$$

$$=\frac{\boxed{1}-u}{m}\vec{a}+(u-\boxed{1})\vec{b}+u\vec{c} \qquad \cdots ⑤$$

となる．直線 DG と直線 EC が共有点をもつのは，P と Q が一致するときであり，このとき，④，⑤ より

$$\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{3+t}{12}\vec{b}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{c}=\frac{1-u}{m}\vec{a}+(u-1)\vec{b}+u\vec{c}$$

が成り立つ．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は $\vec{0}$ でなく，同一平面に平行でないから

$$\frac{t}{3}=\frac{1-u}{m},\quad \frac{3+t}{12}=u-1,\quad \frac{3(1-t)}{4}=u$$

となる．これらより

$$t=-\frac{3}{5},\quad u=\frac{6}{5},\quad m=\boxed{1} \qquad \cdots ⑥$$

である．このとき，その共有点を R とすると，④，⑥ または，⑤，⑥ より

$$\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{6}{5}\vec{c}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OC}$$

である．

**直線のベクトル方程式**

点 P が直線 AB 上にあるとき，$t$ を実数として $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ と表されるので

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

**ベクトルの相等**

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $\vec{0}$ でなく，同一平面に平行でないとき

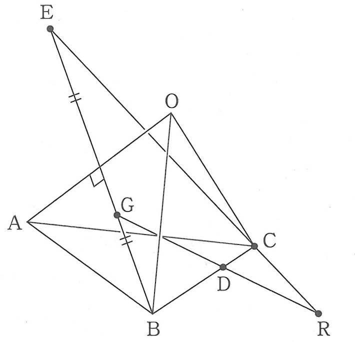
$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$$

($s$，$t$，$u$，$s'$，$t'$，$u'$ は実数)

が成り立つための条件は

$$s=s',\quad t=t',\quad u=u'$$

である．




$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと

$$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2=\frac{1}{5^2}\left|\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{OC}\right|^2$$
$$=\frac{1}{5^2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+36\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\frac{1}{5^2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+36\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+12\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta\right)$$
$$=\frac{1}{5^2}(1^2+36\times1^2+12\times1\times1\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{5^2}(37+12\cos\theta)$$

である．これと $\left|\overrightarrow{OR}\right|=\frac{\sqrt{31}}{5}$，すなわち $\left|\overrightarrow{OR}\right|^2=\frac{31}{5^2}$ より

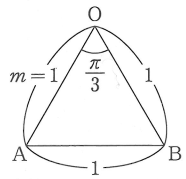
$$\frac{1}{5^2}(37+12\cos\theta)=\frac{31}{5^2}$$
$$\cos\theta=-\frac{1}{2}.$$

このとき $\theta$ は

$$\theta=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi$$

である．

$\left|\overrightarrow{OC}\right|=1.$




三角形 OAB は正三角形．