## 第3問　数　列

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を $d$ とすると

$$a_{13}=a_1+12d.$$

$a_1=4$，$a_{13}=1$ であるから

$$1=4+12d$$

より

$$d=-\frac{1}{4}.$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$ である．

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(n-1)d\\&=4+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\&=-\frac{1}{4}n+\frac{17}{4}.\end{aligned}$$

$a_n\geqq 0$ となるのは

$$-\frac{1}{4}n+\frac{17}{4}\geqq 0$$

$$n\leqq\boxed{17}$$

のときである．よって

$$\begin{cases}1\leqq n\leqq 16 & \text{のとき}\quad a_n>0,\\ n=17 & \text{のとき}\quad a_n=0,\\ 18\leqq n & \text{のとき}\quad a_n<0\end{cases}$$

である．

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$S_n-S_{n-1}=a_n\quad(n\geqq 2)$$

であるから

$$\begin{cases}2\leqq n\leqq 16 & \text{のとき}\quad S_{n-1}<S_n,\\ n=17 & \text{のとき}\quad S_{n-1}=S_n,\\ 18\leqq n & \text{のとき}\quad S_{n-1}>S_n\end{cases}$$

となる．したがって

$$S_1<S_2<\cdots<S_{16}=S_{17}>S_{18}>S_{19}>\cdots$$

であるから，$S_n$ が最大となるのは，$n=16$，$17$ のときであり，最大値は

$$\begin{aligned}S_{16}=S_{17}&=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}\\&=\frac{17(4+0)}{2}=\boxed{34}.\end{aligned}$$

(2)　等比数列 $\{b_n\}$ の公比を $r$ ($r$ は実数) とすると

**等差数列の一般項**

公差 $d$ の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

$a_n=0$ となるのは $n=17$ のとき．

**等差数列の和**

初項 $a$，末項 $\ell$，項数 $n$ の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

$$b_4=b_1r^3.$$

$b_1=4$，$b_4=-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$-\frac{1}{2}=4r^3$$

$$r^3=-\frac{1}{8}.$$

$r$ は実数であるから，$r=-\dfrac{1}{2}$.

よって，数列 $\{b_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$ である.

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n&=b_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &=4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$|b_n|=\left|4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから，$|b_n|\leqq\dfrac{1}{8}$ より

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$n-1\geqq5$$

$$n\geqq6.$$

よって，$|b_n|\leqq\dfrac{1}{8}$ となる自然数 $n$ の値の範囲は $n\geqq\boxed{6}$ である.

> **等比数列の一般項**
>
> 公比 $r$ の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は
>
> $b_n=b_1r^{n-1}$.

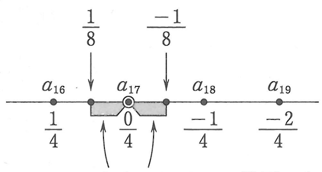
(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を書き並べると以下のようになる.

$$\{a_n\}:\frac{16}{4},\ \frac{15}{4},\ \frac{14}{4},\ \cdots,\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{0}{4},\ \frac{-1}{4},\ \frac{-2}{4},\ \cdots,\ \underset{\substack{\|\\ a_{25}}}{\frac{-8}{4}},\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\underset{\substack{\|\\ \frac{16}{4}}}{4},\ \underset{\substack{\|\\ \frac{-8}{4}}}{-2},\ \underset{\substack{\|\\ \frac{4}{4}}}{1},\ \underset{\substack{\|\\ \frac{-2}{4}}}{\frac{-1}{2}},\ \underset{\substack{\|\\ b_5}}{\frac{1}{4}},\ \frac{-1}{8},\ \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 $-\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから，各項は分母が 4，分子が 16 以下の整数である分数で表される．$n\geqq6$ のとき $-\dfrac{1}{8}\leqq b_n\leqq\dfrac{1}{8}$，$b_n\neq0$ であるから，このとき $b_n=a_k$ を満

たす自然数 $k$ は存在しない．また，$b_1$，$b_2$，$b_3$，$b_4$，$b_5$ に対しては，それらと等しい項が数列 $\{a_n\}$ の中にそれぞれ1つずつ存在する．




$n \geqq 6$ のとき，$b_n$ はこの範囲に存在する．

したがって，$a_k = b_\ell$ を満たす自然数の組 $(k,\ \ell)$ の個数は

$\boxed{5}$ であり，このうち $k$ が最大のものは

$(k,\ \ell) = \left(\boxed{25},\ \boxed{2}\right)$ である．

$b_2 = \dfrac{-8}{4} = a_{25}$.

(4) $$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{(5-a_n)(5-a_{n+1})} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots ①$$

であるから，数列 $\{c_n\}$ の階差数列は $\left\{\dfrac{1}{(5-a_n)(5-a_{n+1})}\right\}$ である．

$$\begin{cases} 5-a_n = 5-\left(-\dfrac{1}{4}n + \dfrac{17}{4}\right) = \dfrac{n+3}{4}, \\ 5-a_{n+1} = 5-\left\{-\dfrac{1}{4}(n+1) + \dfrac{17}{4}\right\} = \dfrac{n+4}{4} \end{cases}$$

$a_n = -\dfrac{1}{4}n + \dfrac{17}{4}$.

$a_{n+1} = -\dfrac{1}{4}(n+1) + \dfrac{17}{4}$.

より

$$\frac{1}{(5-a_n)(5-a_{n+1})} = \frac{16}{(n+3)(n+4)}$$
$$= 16\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).$$

$\dfrac{1}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+4}$.

これと①より

$$c_{n+1} = c_n + \boxed{16}\left(\frac{1}{n+\boxed{3}} - \frac{1}{n+\boxed{4}}\right)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 16\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$$
$$= 0 + 16\left\{\left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1+3}} - \frac{1}{n-1+4}\right)\right\}$$
$$= 16\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= 4 - \frac{16}{n+3}.$$

| |
|---|
| $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ のとき<br>$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \quad (n \geqq 2)$. |

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$c_n = \boxed{4} - \frac{\boxed{16}}{n+\boxed{3}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

したがって

$c_n$ が整数

$\iff \dfrac{16}{n+3}$ が整数

$\iff n+3$ が 16 の約数

$\iff n+3=4,\ 8,\ 16$

$\iff n=1,\ 5,\ 13.$

よって，$c_n$ が整数となる自然数 $n$ の個数は $\boxed{\ 3\ }$ であり，そのような $n$ の最大値は $\boxed{\ 13\ }$ である．

⬅ $n \geqq 1$ より，$n+3 \geqq 4$．