# 第2問　微分法・積分法

関数 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするので

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{ は定数})$$

である．

> **不定積分**
>
> $F'(x) = f(x)$ が成り立つとき，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．
>
> $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき
>
> $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$
>
> （$C$ は定数）．
>
> 定数 $C$ を積分定数という．

$f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの定積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(\boxed{b}) - F(\boxed{a})$$

である．

> **定積分**
>
> $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると
>
> $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha).$$

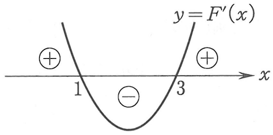
(1)　$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とする．$f(x) = F'(x)$ より

$$f(x) = \boxed{3}x^2 - \boxed{12}x + \boxed{9}$$
$$= 3(x-1)(x-3)$$

> **導関数**
>
> $(x^n)' = nx^{n-1}$　（$n$ は自然数），
>
> $(c)' = 0$　（$c$ は定数）．

である．したがって，$F(x)$ の増減は次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)\,(=f(x))$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $F(x)$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ |

> $F'(x)\,(=f(x))$ の符号は，$y=F'(x)$ のグラフを用いると調べやすい．
>
> 
> 

よって，$F(x)$ は $x=\boxed{1}$ で極大値 $\boxed{4}$，$x=\boxed{3}$ で極小値 $\boxed{0}$ をとる．

(2)　$f(x) = x^2 - 2x - 3$ とし，座標平面上で曲線 $y=f(x)$ を $D$ とする．

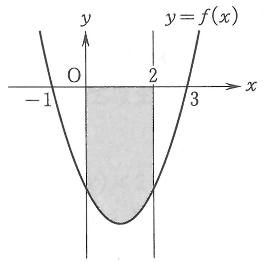
$F'(x) = f(x)$ より

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$
$$= \int (x^2 - 2x - 3)\,dx$$
$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}x^3 - x^2 - \boxed{3}x + C \quad (C\text{ は定数})$$

と表される．

> $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$
>
> （$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$．$C$ は定数）．

$D$ の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分と2直線 $x=0$，$x=2$，および $x$ 軸で囲まれた図形は，次図の影の部分である．




> $f(x) = (x+1)(x-3)$ より，曲線 $D$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は
>
> $$x = -1,\ 3.$$

この図形の面積 $S$ は

$$S=\int_0^2\{-f(x)\}\,dx=\Big[-F(x)\Big]_0^2$$
$$=-F(2)-\{-F(0)\}$$
$$=F\left(\boxed{0}\right)-F\left(\boxed{2}\right)$$

であり，$F(0)=C$，$F(2)=-\dfrac{22}{3}+C$ であるから

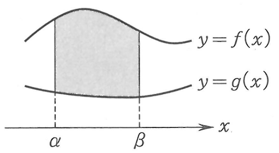
$$S=C-\left(-\frac{22}{3}+C\right)=\frac{\boxed{22}}{\boxed{3}}$$

である．

**面積**

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積 $S$ は

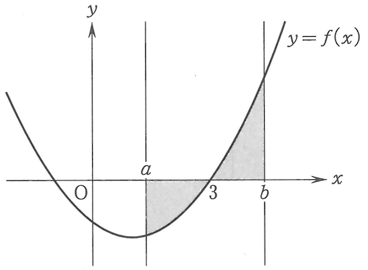
$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$




$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$
（$C$ は定数）．

$F(0)-F(2)$ を計算するときは，$C=0$ として計算してもよい．

$0<a<3$，$3<b$ とする．$D$ の $x\geqq0$ の部分と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および $x$ 軸で囲まれた二つの図形は次図の影の部分である．




この二つの図形の面積の和 $T$ は

$$T=\int_a^3\{-f(x)\}\,dx+\int_3^b f(x)\,dx$$
$$=\Big[-F(x)\Big]_a^3+\Big[F(x)\Big]_3^b$$
$$=-F(3)-\{-F(a)\}+F(b)-F(3)$$
$$=F\left(\boxed{a}\right)+F\left(\boxed{b}\right)-\boxed{2}F\left(\boxed{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}a^3-a^2-3a+\frac{1}{3}b^3-b^2-3b+18$$

である．

$F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$ すなわち $C=0$ として計算してよい．

$F(3)=\dfrac{1}{3}\cdot3^3-3^2-3\cdot3=-9.$

$b=a+3$ のとき，$T$ を $a$ で表すと

$$T=\frac{1}{3}a^3-a^2-3a+\frac{1}{3}(a+3)^3-(a+3)^2-3(a+3)+18$$
$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}a^3+a^2-\boxed{3}a+\boxed{9}$$

である．

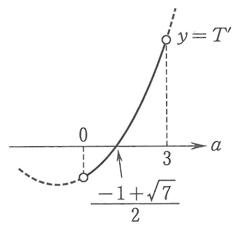
$T$ を $a$ で微分して

$$T'=2a^2+2a-3.$$

$0<a<3$ における $T$ の増減は次のようになる．

| $a$ | (0) | … | $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ | … | (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $T'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $T$ | | ↘ | | ↗ | |

$T'$ の符号は，$y=T'$ のグラフを用いると調べやすい．



よって，$a$ が $0<a<3$ の範囲を動くとき，$T$ は

$$a=\frac{\boxed{-1}+\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$ で最小値をとる．