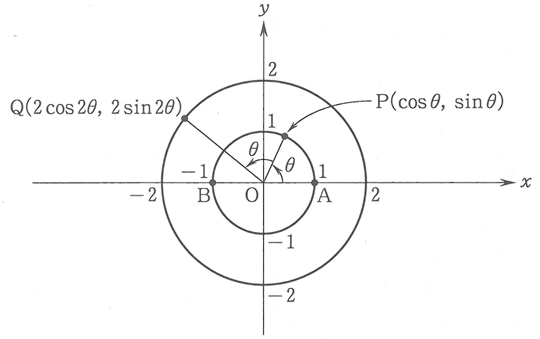
第1問　三角関数，指数関数・対数関数

〔1〕

$0<\theta<\pi$.



$$\mathrm{AP}^2=\left(\cos\theta-\boxed{\ 1\ }\right)^2+\sin^2\theta$$
$$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+1-2\cos\theta$$
$$=\boxed{\ 2\ }-\boxed{\ 2\ }\cos\theta,$$

2点間の距離
2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

$$\mathrm{BQ}^2=(2\cos2\theta+1)^2+(2\sin2\theta)^2$$
$$=4(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)+1+4\cos2\theta$$
$$=\boxed{\ 5\ }+\boxed{\ 4\ }\cos2\theta$$

$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$.

である．

$\cos2\theta=\boxed{\ 2\ }\cos^2\theta-\boxed{\ 1\ }$ より，$\cos\theta=t$ とおくと
$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}$ すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BQ}^2$ は

2倍角の公式
$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$.

$$2-2t=5+4(2t^2-1)$$

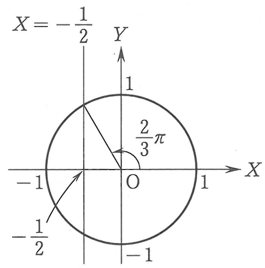
となる．これを整理して

$$8t^2+2t-1=0$$
$$(2t+1)(4t-1)=0$$

より，$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}$ を満たす t の値は

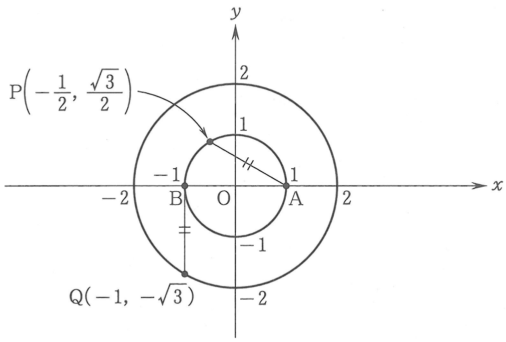
$$\frac{\boxed{-1}}{\boxed{\ 2\ }}\ と\ \frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 4\ }}$$

である．



$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$0<\theta<\pi$ より
$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから，点Qの座標は $\left(\boxed{-1},\ \boxed{\ -\ }\sqrt{\boxed{\ 3\ }}\right)$ である．

$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(2\cdot\dfrac{2}{3}\pi\right),\ 2\sin\left(2\cdot\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$.



← $t=-\dfrac{1}{2}$ のときのPとQの位置は左図のようになり

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\sqrt{3}$$

である．

また，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき，すなわち $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

← $0<\theta<\pi$ のとき，$\sin\theta>0$.

であるから

$$2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)=2\left\{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-1\right\}=-\frac{7}{4},$$

$$2\sin 2\theta=4\sin\theta\cos\theta=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

← **2倍角の公式**

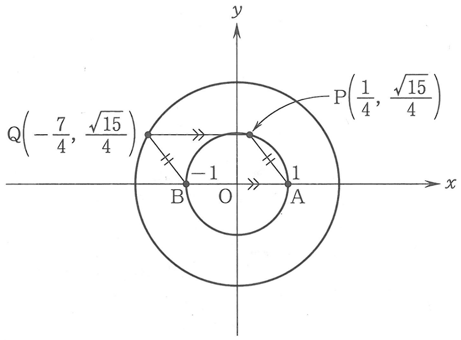
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

である．よって，2点P，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right),\quad \mathrm{Q}\left(-\frac{7}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

← $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ である．

であるから，AB // PQ が成り立つ．すなわち，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．



← $t=\dfrac{1}{4}$ のときのPとQの位置は左図のようになり

$$\begin{cases}\mathrm{AB}\,/\!/\,\mathrm{PQ},\\ \mathrm{AB}=\mathrm{PQ}(=2)\end{cases}$$

である．このとき，四角形APQBは平行四辺形となっている．

［2］

$$f(x)=\log_a(2x-a)\quad(a>0,\ a\neq 1).$$

(1) $a=3$ のとき．

$$f(2)=\log_3(2\cdot2-3)=\log_3 1=\boxed{0}.$$

← $a>0$, $a\neq1$ のとき $a^0=1$ より $\log_a 1=0$.

次に，$f(100)=\log_3(2\cdot100-3)=\log_3 197$ の整数部分を求める．

$$3^4<197<3^5$$

であるから

$$\log_3 3^4 < \log_3 197 < \log_3 3^5$$

より

$$4 < f(100) < 5.$$

よって，$f(100)$ の整数部分は $\boxed{4}$ である．

$a > 1$, $M > 0$, $N > 0$ のとき

$M < N \iff \log_a M < \log_a N.$

$a > 0$, $a \neq 1$, p が実数のとき

$\log_a a^p = p.$

(2) 真数は正であるから，$2x - a > 0$ より $x > \dfrac{a}{\boxed{2}}$ …①

である．① の範囲のもとで，$f(x) = 2$ を変形すると

$$\log_a(2x - a) = 2$$

$$2x - a = a^2$$

より

$$x = \frac{a^2 + a}{2}. \quad \cdots ②$$

ここで，$a > 0$ より

$$\frac{a^2 + a}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} > \frac{a}{2}$$

であるから，② は ① を満たす．よって，x の方程式 $f(x) = 2$ を満たす x の値は

$$x = \frac{a^{\boxed{2}} + a}{\boxed{2}}$$

である．

次に，x の不等式 $f(x) < 2$ を満たす x の値の範囲を求めよう．

(i) $0 < a < 1$ のとき．

① の範囲のもとで，$f(x) < 2$ を変形すると

$$\log_a(2x - a) < 2$$

より

$$\log_a(2x - a) < \log_a a^2.$$

$2 = \log_a a^2.$

よって

$$2x - a > a^2$$

$0 < a < 1$, $M > 0$, $N > 0$ のとき

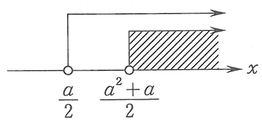
$\log_a M < \log_a N \iff M > N.$

より

$$x > \frac{a^2 + a}{2}.$$

これと ① より，$f(x) < 2$ を満たす x の値の範囲は

$$\frac{a^2 + a}{2} < x$$



であるから，$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

(ii) $a > 1$ のとき．

① の範囲のもとで，$f(x) < 2$ を変形すると

$$\log_a(2x - a) < \log_a a^2$$

より

$$2x-a<a^2$$

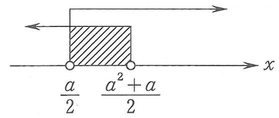
すなわち

$$x<\frac{a^2+a}{2}.$$

> $a>1,\quad M>0,\quad N>0$
> のとき
> $\log_a M<\log_a N$
> $\iff M<N.$

これと ① より，$f(x)<2$ を満たす x の値の範囲は

$$\frac{a}{2}<x<\frac{a^2+a}{2}$$



であるから，$\boxed{ネ}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

(3) $1<a<2$.

x の不等式

$$f(x)+1<f(2x) \qquad \cdots(*)$$

すなわち

$$\log_a(2x-a)+1<\log_a(4x-a)$$

を解こう．

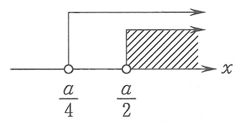
真数は正であるから

$$2x-a>0 \quad かつ \quad 4x-a>0$$

より

$$x>\frac{a}{\boxed{2}}. \qquad \cdots③$$

$1<a<2$ より $\frac{a}{4}<\frac{a}{2}$.



この範囲のもとで，(*) を変形すると

$$\log_a(2x-a)+\log_a a<\log_a(4x-a)$$

$1=\log_a a.$

より

$$\log_a(2x-a)a<\log_a(4x-a).$$

$a>1$ であるから

$$(2x-a)a<4x-a$$

すなわち

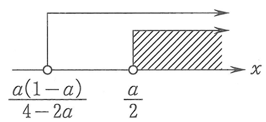
$$(\boxed{4}-\boxed{2}a)x>a(1-a).$$

したがって，$\boxed{フ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

ここで，$1<a<2$ より $4-2a>0$ であるから

$$x>\frac{a(1-a)}{4-2a}. \qquad \cdots④$$

さらに，$1<a<2$ において成り立つ $\frac{a(1-a)}{4-2a}<0<\frac{a}{2}$ という大小関係を考えると ③ かつ ④ の範囲は ③ であるから，(*) を満たす x の値の範囲は



$$\frac{a}{2}<x$$

である．すなわち，$\boxed{ヘ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．