第4回

1D.

[1].

$A(1,0),\ B(-1,0),\ P(\cos\theta, \sin\theta)$

$Q(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

$(0<\theta<\pi)$

$AP^2 = (\cos\theta - 1)^2 + (\sin\theta)^2$ ア

$= \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta$

$= 2 - 2\cos\theta$ イウ

$BQ^2 = (2\cos 2\theta + 1)^2 + (2\sin 2\theta)^2$

$= 4\cos^2 2\theta + 4\cos 2\theta + 1 + 4\sin^2 2\theta$

$= 5 + 4\cos 2\theta$ エオ

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より カキ

$\cos\theta = t$ とおくと．

$AP^2 = 2 - 2t$

$BQ^2 = 5 + 4(2t^2 - 1)$

$= 8t^2 + 1.$

$0<\theta<\pi$ より．$-1<t<1.$

$AP = BQ$ となるとき

$2 - 2t = 8t^2 + 1.$

$8t^2 + 2t - 1 = 0.$

$(2t+1)(4t-1) = 0$

$t = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

$-1<t<1$ より．みたす

$t = -\frac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{2}{3}\pi$

$Q\left(2\cos\frac{4}{3}\pi,\ 2\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

$= Q\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right),\ 2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= Q(-1,\ -\sqrt{3})$ ス〜ソ.

$t = \frac{1}{4}$ のとき、$\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$P\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

$2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta - 2$ より

$= 4 \times \frac{1}{16} - 2 = -\frac{7}{4}$

$2\sin 2\theta = 2\times 2\sin\theta\cos\theta = 4\sin\theta\cos\theta$ より

$= 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$Q\left(-\frac{7}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

$AB:\ y = 0,\quad PQ:\ y = \frac{\sqrt{15}}{4}.$ よって $AB \parallel PQ$

1

[2].

$a>0,\ a\neq 0$

$f(x)=\log_a(2x-a)$

(1) $a=3$ のとき

$f(x)=\log_3(2x-3)$

$f(2)=\log_3(4-3)=\log_3 1=\underline{0}$

$f(100)=\log_3(200-3)=\log_3 197$

$3^4=81\quad 3^5=243$

$3^4<197<3^5$ より

$\log_3 3^4<\log_3 197<\log_3 3^5$

$4<\log_3 197<5$

整数部 $\underline{4}$

(2). 真数条件より. $2x-a>0$

$2x>a\quad x>\underline{\dfrac{a}{2}}$

$f(x)=2$ をみたすとき.

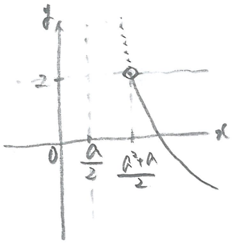
$\log_a(2x-a)=2$.

$2x-a=a^2$

$2x=a^2+a$

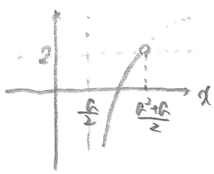
$x=\underline{\dfrac{a^2+a}{2}}$ だ.

$0<a<1$ のとき $f(x)<2$ をみたす.




$\dfrac{a^2+a}{2}<x$ $\underline{2}$

$1<a$ のとき $f(x)<2$ をみたす




$\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a^2+a}{2}$

$\underline{4}$

(3). $1<a<2$ とする.

$f(x)+1<f(2x)$ —(*) をみたす $x$ の範囲

$f(2x)=\log_a(4x-a)$ より

$\log_a(2x-a)+1<\log_a(4x-a)$

$\log_a(4x-a)-\log_a(2x-a)>1$.

$\log_a\dfrac{4x-a}{2x-a}>1$.

真数条件より $2x-a>0$ かつ $4x-a>0$ より

$x>\dfrac{a}{2}$, かつ $x>\dfrac{a}{4}$ よって $x>\underline{\dfrac{a}{2}}$

$\dfrac{4x-a}{2x-a}>a$

$4x-a>a(2x-a)$

$4x-a>2ax-a^2$

$4x-2ax>a-a^2$

$(\underline{4-2a})x>a(1-a)$.

$\underline{2}$

$x>\dfrac{a(1-a)}{4-2a}$

$\dfrac{a}{2}-\dfrac{a(1-a)}{4-2a}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a(1-a)}{2(2-a)}$

$=\dfrac{a(2-a)-a(1-a)}{2(2-a)}=\dfrac{2a-\cancel{a^2}-a+\cancel{a^2}}{2(2-a)}$

$=\dfrac{a}{2(2-a)}$

$1<a<2$ より $2-a>0$.

$\dfrac{a}{2(2-a)}>0\qquad x>\dfrac{a}{2}>\dfrac{a(1-a)}{4-2a}$

よって $x>\dfrac{a}{2}$ $\underline{1}$

2.

$F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$

$= \underset{ア}{F(b)} - \underset{イ}{F(a)}$

(1). $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とすると.

$f(x) = F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ウ〜カ

$f(x) = 0$ のとき.

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0.$

$x = 1, 3.$

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | 0 | | 0 | |
| $F$ | | 4 | | 0 | |

$F(1) = 1 - 6 + 9 = 4$

$F(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

$x = \underset{キ}{1}$ で 極大 $\underset{ク}{4}$.

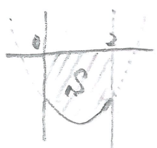
$x = \underset{ケ}{3}$ で 極小 $\underset{コ}{0}$

(2). $f(x) = x^2 - 2x - 3$ とする.

$F(x) = \underset{サ}{\frac{1}{3}}x^3 - x^2 - \underset{ス}{3x} + C$

D: $f(x) = x^2 - 2x - 3.$

$= (x-1)^2 - 4.$




$S = \int_0^2 \{-f(x)\}\,dx = -\int_0^2 f(x)\,dx$

$= -[F(x)]_0^2 = -\{F(2) - F(0)\}$

$= \underset{セ}{F(0)} - \underset{ソ}{F(2)}$

$= -\left(\frac{1}{3}\times 8 - 4 - 3\times 2\right)$

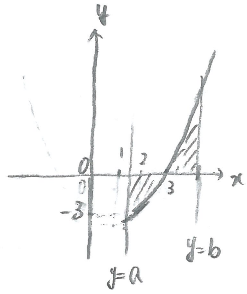
$= -\left(\frac{8}{3} - \frac{30}{3}\right).$

$= \frac{22}{3}$ タ〜ツ

$0 < a < 3,\ 3 < b$ とする.

$f(x) = 0$ のとき. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0.\ x = 3, -1$




$T = \int_a^3 \{-f(x)\}\,dx + \int_3^b f(x)\,dx$

$= -[F(x)]_a^3 + [F(x)]_3^b = -\{F(3) - F(a)\} + F(b) - F(3)$

$= F(a) + F(b) - 2F(3)$ テ〜ニ.

$b = a + 3$ とすると.

$T = F(a) + F(a+3) - 2F(3)$

$= \frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a + \frac{1}{3}(a+3)^3 - (a+3)^2 - 3(a+3)$

$\quad - 2\left(\frac{1}{3}\times 27 - 9 - 9\right)$

$= \frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a + \frac{1}{3}(a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - (a^2 + 6a + 9)$

$\quad - 3a - 9 + 18$

$= \frac{2}{3}a^3 + a^2 - 3a + 9$

$T'(a) = 2a^2 + 2a - 3 = 0$

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$2 < \sqrt{7} < 3 \qquad 1 < -1 + \sqrt{7} < 2. \qquad \frac{1}{2} < a < 1$

| $a$ | $\cdots$ | $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $T$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | 小 | ↗ | |

$T$ は, $a = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ で 最小となる. ヌ〜ノ

[3].

(1). $a_n = a+(n-1)d$ とおくと

$a_1=4$, $a_{13}=1$ より

$a_{13} = 4+12d = 1$

$12d = -3$. $d = -\frac{1}{4}$ アイウ

$a_n = 4-\frac{1}{4}(n-1)$

$= -\frac{1}{4}n+\frac{17}{4}$

$a_n \geq 0$ となるとき、

$-\frac{1}{4}n+\frac{17}{4} \geq 0$

$n-17 \leq 0$. $n \leq 17$ エオ

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の最大は、$n=17$ のとき。

すなわち、

$\sum_{k=1}^{17}\left(-\frac{1}{4}n+\frac{17}{4}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{17\times\cancel{18}^{9}}{\cancel{2}_{1}}+\frac{17}{4}\times17$

$= \frac{-17\cdot9+17\cdot17}{4} = \frac{17(-9+17)}{4}$

$= \frac{17\times\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}} = 34$ カキ

(2). $b_n = b\cdot r^{n-1}$ とおくと

$b_1 = 4$, $b_4 = -\frac{1}{2}$ より

$b_4 = 4\cdot r^3 = -\frac{1}{2}$

$r^3 = -\frac{1}{8}$  $r = -\frac{1}{2}$ クケコ

$b_n = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$|b_n| = \frac{1}{8}$ となるのは

$2^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

$|b_n| \leq \frac{1}{8}$ となるのは、 $n \geq 6$ サ

(3). $a_k = b_l$ をみたす組

$-\frac{1}{4}k+\frac{17}{4} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}$

$k-17 = -16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}$

$k, l$ は自然数であるので

$l=1$ のとき

$k = 17-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 17-16 = 1$

$l=2$ のとき

$k = 17-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 17+8 = 25$

$l=3$ のとき

$k = 17-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 17-4 = 13$

$l=4$ のとき

$k = 17-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 17+2 = 19$

$l=5$ のとき

$k = 17-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 17-1 = 16$.  5つ シ

$k$ が最大の組 $(k, l) = (25, 2)$ ス〜ソ

(4). $c_1 = 0$, $c_{n+1} = c_n+\frac{1}{(5-a_n)(5-a_{n+1})}$

$c_{n+1} = c_n+\frac{1}{\left(5-\frac{-n+17}{4}\right)\left(5-\frac{-(n+1)+17}{4}\right)}$

$= c_n+\frac{16}{(20+n-17)(20+n+1-17)}$

$= c_n+\frac{16}{(n+3)(n+4)}$

$= c_n+16\cdot\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$ タ〜テ

$c_n = c_1+\sum_{k=1}^{n-1}16\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

$= 0+16\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{n+3}\right)$

$= 16\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}\right) = 4-\frac{16}{n+3}$ ト〜ヌ

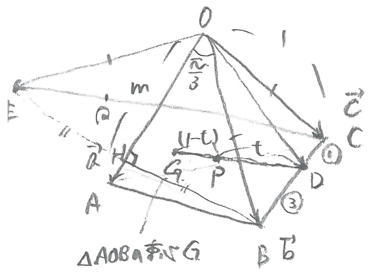
$c_n$ が整数となるのは、

$n+3 = 2^m$  $0 \leq m \leq 4$ ←($16 = 2^4$ より)

$n+3 = 1$  $n = -2$
$n+3 = 2$  $n = -1$  } 不適
$n+3 = 4$  $n = 1$
$n+3 = 8$  $n = 5$
$n+3 = 16$  $n = 13$  3つ ネ

最大  $n = 13$ ノハ

$\boxed{k}$.




△AOBの重心G

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$= m\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{m}{2}}$ ア.

$\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4} = \underline{\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}}$ イ～エ

$\overrightarrow{OG} = \underline{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$. オ～キ.

$\overrightarrow{OH} = k\vec{a}$ — ①

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$ より. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA} = \underline{0}$ ク.

$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH} = -\vec{b}+k\vec{a}$

$(-\vec{b}+k\vec{a})\cdot\vec{a} = 0$

$-\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{a}|^2 = 0$

$-\frac{m}{2}+m^2k = 0.$

$m^2k = \frac{m}{2}$

$k = \underline{\frac{1}{2m}}$ ケコ

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{HB}$

$= \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{BH}$

$= \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}$

$= \underline{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}$ サ

$= \frac{2}{2m}\vec{a}-\vec{b}$

$= \underline{\frac{1}{m}}\vec{a}-\vec{b}$ シ.

$\overrightarrow{OP} = (\underset{s}{1-t})\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OG}$

$= (1-t)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$= \frac{1-t}{4}\vec{b}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{c}+\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}$

$= \frac{t}{3}\vec{a}+\frac{3-3t+4t}{12}\vec{b}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{c}$

$= \underline{\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{3+t}{12}\vec{b}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{c}}$ セ～ト

$\overrightarrow{OQ} = (\underset{t}{1-u})\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OC}$

$= (1-u)\cdot\left(\frac{1}{m}\vec{a}-\vec{b}\right)+u\vec{c}$

$= \underline{\frac{1-u}{m}\vec{a}+(u-1)}\vec{b}+u\vec{c}$ =ス.

DGとECが共有点をもつ ⟹ $\underline{\text{PとQが一致する.}}$

$$\begin{cases} \frac{t}{3} = \frac{1-u}{m} & \text{— ①} \\ \frac{3+t}{12} = u-1 & \text{— ②} \\ \frac{3(1-t)}{4} = u & \text{— ③} \end{cases}$$

②.③より. $\frac{3+t}{12} = \frac{3(1-t)}{4}-1$

$3+t = 9(1-t)-12$

$= 9-9t-12.$

$10t = -6$

$t = -\frac{3}{5}$

$u = \frac{3\left(1+\frac{3}{5}\right)}{4} = \frac{3\times\frac{8}{5}}{4} = \frac{6}{5}$

①より $m = (1-u)\times\frac{3}{t}$

$= \left(1-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{\frac{3}{5}}\right) = -\frac{1}{5}\times(-5) = \underline{1}$ ネ

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となる点R

$\overrightarrow{OR} = \left(1-\frac{6}{5}\right)\vec{a}+\left(\frac{6}{5}-1\right)\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{c}$

$= -\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{6}{5}\vec{c}$

$= \frac{1}{5}(-\vec{a}+\vec{b})+\frac{6}{5}\vec{c}$

$= \frac{1}{5}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+\frac{6}{5}\overrightarrow{OC}$

$= \underline{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{OC}}$ ノ～フ.

(うら面)

$|\vec{OR}| = \dfrac{\sqrt{31}}{5}$ となるとき

$|\vec{OR}|^2 = \dfrac{31}{25}$

$|\vec{OR}|^2 = \left|\dfrac{1}{5}\vec{AB} + \dfrac{6}{5}\vec{OC}\right|^2$

$= \dfrac{1}{25}|\vec{AB}|^2 + \dfrac{12}{25}\vec{AB}\cdot\vec{OC} + \dfrac{36}{25}|\vec{OC}|^2$

$= \dfrac{1}{25}|\vec{AB}|^2 + \dfrac{12}{25}\left(|\vec{AB}|\cdot|\vec{OC}|\cdot\cos\theta\right) + \dfrac{36}{25}|\vec{OC}|^2$

$= \dfrac{1}{25}|\vec{AB}|^2 + \dfrac{12}{25}|\vec{AB}||\vec{OC}|\cdot\cos\theta + \dfrac{36}{25}|\vec{OC}|^2$

$= \dfrac{1}{25}\left\{|\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA}\cdot\vec{OB} + |\vec{OB}|^2\right\} + \dfrac{12}{25}|\vec{AB}||\vec{OC}|\cdot\cos\theta + \dfrac{36}{25}|\vec{OC}|^2$

$= \dfrac{1}{25}\left(m^2 - 2\cdot\dfrac{m}{2} + 1\right) + \dfrac{12}{25}|\vec{AB}||\vec{OC}|\cdot\cos\theta + \dfrac{36}{25}$

$= \dfrac{1}{25}(m^2 - m + 1) + \dfrac{12}{25}\sqrt{m^2-m+1}\cdot\cos\theta + \dfrac{36}{25} = \dfrac{31}{25}$

$m^2 - m + 1 + 12\sqrt{m^2-m+1}\,\cos\theta + 36 = 31$

$(m = 1$ より$)$

$1 - 1 + 1 + 12\sqrt{1-1+1}\,\cos\theta + 36 = 31$

$12\cos\theta + 37 = 31$

$12\cos\theta = -6$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

Ans.