

第3問 (選択問題) (配点 20)

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

n を自然数とする。座標平面上で、三つの不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + 2y \leq 2n$$

によって表される領域を D とする。領域 D に含まれる格子点の個数を求めよう。

領域 D は3点 $(0, 0)$, $(\boxed{\text{ア}}, 0)$, $(0, \boxed{\text{イ}})$ を頂点とする三角形の周および内部である。 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。

- ① 1 ② 2 ③ n ④ $2n$ ⑤ $3n$ ⑥ $4n$

(1) $n=1$ のとき、 D に含まれる格子点は $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

$n=2$ のとき、 D に含まれる格子点は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。

(2) 一般に、自然数 n に対し、 D に含まれる格子点の個数を n を用いて表そう。整数 k が $0 \leq k \leq \boxed{\text{イ}}$ を満たすとき、 D に含まれる格子点で直線 $y=k$ 上にあるものは

$$(0, k), (1, k), (2, k), \dots, (\boxed{\text{オ}}n - \boxed{\text{カ}}k, k)$$

の $\boxed{\text{キ}}n - \boxed{\text{ク}}k + \boxed{\text{ケ}}$ 個である。よって、 D に含まれる格子点の個数は

$$(n + \boxed{\text{コ}})^{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B 第3問は次ページに続く。)

(3) n を自然数とする。座標平面上で、三つの不等式

$$y \geq 0, \quad x + 2y \leq 2n, \quad y \leq x$$

によって表される領域を E とする。領域 E に含まれる格子点の個数を求めよう。

領域 E は 3 点 $(0, 0)$, $(\boxed{\text{ア}}, 0)$, $\left(\frac{\boxed{\text{シ}}n}{\boxed{\text{ス}}}, \frac{\boxed{\text{シ}}n}{\boxed{\text{ス}}}\right)$ を頂点とする三角

形の周および内部である。

$\frac{\boxed{\text{シ}}n}{\boxed{\text{ス}}}$ 以下の最大の整数を N とする。整数 k が $0 \leq k \leq N$ を満たすとき、

E に含まれる格子点で直線 $y = k$ 上にあるものは $\boxed{\text{セ}}n - \boxed{\text{ソ}}k + \boxed{\text{タ}}$ 個である。

n が 3 の倍数のとき、 m を自然数として、 $n = 3m$ と表されるから、

$N = \boxed{\text{チ}}m$ である。このとき、 E に含まれる格子点の個数は

$$\frac{(n + \boxed{\text{ツ}})(\boxed{\text{テ}}n + \boxed{\text{ト}})}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

n を 3 で割った余りが 1 のとき、 m を自然数として、 $n = 3m - 2$ と表されるから、 $N = \boxed{\text{ニ}}m - \boxed{\text{ヌ}}$ である。このとき、 E に含まれる格子点の個数は

$$\frac{(n+2)(2n+1)}{3}$$

である。

n を 3 で割った余りが 2 のとき、 m を自然数として、 $n = 3m - 1$ と表されるから、 $N = \boxed{\text{ネ}}m - \boxed{\text{ノ}}$ である。このとき、 E に含まれる格子点の個数は

$$\frac{(n+1)(2n+3)}{3}$$

である。