第5問　確率分布と統計的な推測

(1)　赤球が4個，白球が2個入っている袋の中から1個の球を取り出す試行を1回行うとき，その球が赤球である確率は $\frac{2}{3}$ であり，白球である確率は $\frac{1}{3}$ である．よって，5回の試行のうち，赤球が取り出された回数 X について

$$P(X=1)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{\boxed{10}}{\boxed{243}}$$

$$P(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{\boxed{40}}{243}$$

である．

反復試行の確率

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする．この試行を n 回繰り返し行うとき，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である．

(2)　地域Aにおける政策Sの支持率は $\frac{4000}{12000}=\frac{1}{3}$ である．

12000は十分に大きいと考えられるので，無作為抽出した10人のうち支持する人の人数である確率変数 Y は近似的に二項分布 $B\left(\boxed{10},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\right)$ に従う．よって，確率変数 Y の平均(期待値)は

$$10\cdot\frac{1}{3}=\frac{\boxed{10}}{\boxed{3}}$$

であり，分散は

$$10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{20}}{\boxed{9}}$$

である．

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると平均 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=np$$
$$V(X)=npq.$$

別の地域B，Cにおいては無作為抽出した n 人で標本調査を行った．

n は十分に大きいので，標本比率を R とすると，政策Sの支持率 p に対する信頼度95%の信頼区間は

$$R-\boxed{1}.\boxed{96}\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

である．よって，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

地域Bでは，$n=600$ のとき $W=240$ であったから

$$R=\frac{240}{600}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}$$

である．このとき

$$1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{600}}=\frac{1.96}{50}=0.0392$$

であるから，求める信頼区間は

母比率の推定

標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\left[R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}},\right.$$
$$\left.R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right].$$

正規分布表より，$\frac{0.95}{2}$ すなわち0.475となる z_0 の値は1.96である．

$$0.4-0.0392 \leqq p \leqq 0.4+0.0392$$

すなわち

$$0.3608 \leqq p \leqq 0.4392$$

である．小数第4位を四捨五入して

$$0.\boxed{361} \leqq p \leqq 0.\boxed{439}$$

である．

次に地域Cでは，地域Aと同じような結果になることがわかっているので $R=\dfrac{1}{3}$ と予測する．信頼区間の幅 L は

$$L=\left(R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)-\left(R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)$$

$$=2\times 1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

であるから，$R=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$L=2\times 1.96\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}}=\frac{2\sqrt{2}\times 1.96}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

である．

よって，$L \leqq 0.04$ となる条件は

$$\frac{2\sqrt{2}\times 1.96}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq 0.04$$

より

$$n \geqq \left(\frac{196}{3\sqrt{2}}\right)^2=2134.2\cdots$$

すなわち

$$n \geqq 2135$$

であるから，$\boxed{\text{ホ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．