第3問　数　列

三つの不等式

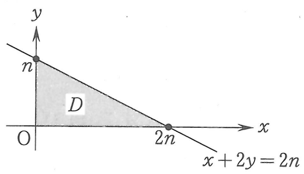
$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad x+2y \leqq 2n$$

によって表される領域が D である．

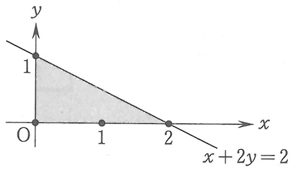
直線 $x+2y=2n$ と x 軸，y 軸の交点の座標はそれぞれ

$$(2n,\ 0), \quad (0,\ n)$$

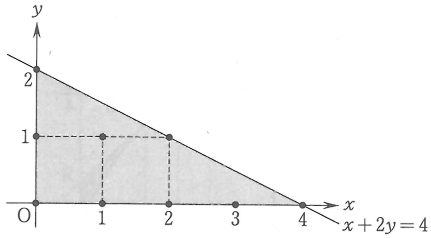
である．よって，領域 D は次図のような3点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部である．したがって，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものはそれぞれ $\boxed{③}$，$\boxed{②}$ である．



(1)　$n=1$ のとき，D に含まれる格子点は次図より $\boxed{4}$ 個ある．



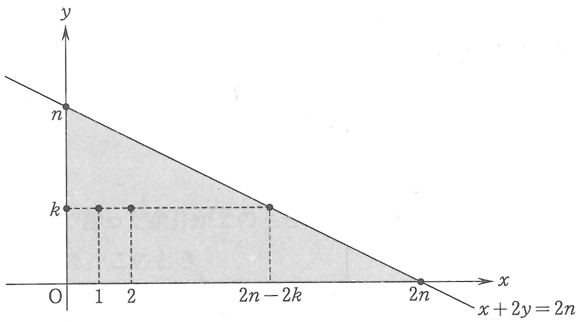
$n=2$ のとき，D に含まれる格子点は次図より $\boxed{9}$ 個ある．



(2)　整数 k が $0 \leqq k \leqq n$ を満たすとき，D に含まれる格子点で直線 $y=k$ 上にあるものは，次図より

$$(0,\ k),\ (1,\ k),\ (2,\ k),\ \cdots,\ \left(\boxed{2}n-\boxed{2}k,\ k\right)$$

の $\boxed{2}n-\boxed{2}k+\boxed{1}$ 個である．



$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の各々のときの D に含まれる格子点で直線 $y=k$ 上の点の個数を加えると，D に含まれる格子点の個数が求まる．

$2n-2k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は，項数 $n+1$，初項 $2n+1$，末項 1 の等差数列の一般項であるから，D に含まれる格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=\frac{n+1}{2}\{(2n+1)+1\}=\left(n+\boxed{1}\right)^{\boxed{2}}$$

である．

⬅ (等差数列の和)
$=\frac{(項数)}{2}\{(初項)+(末項)\}$.

(3) 三つの不等式

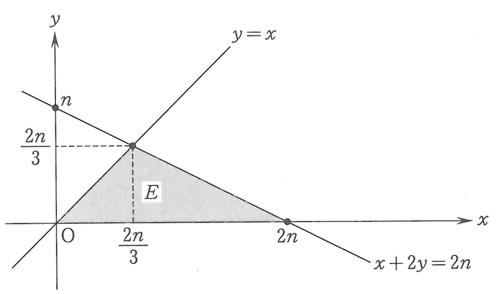
$$y\geqq 0,\quad x+2y\leqq 2n,\quad y\leqq x$$

によって表される領域が E である．

二つの直線

$$x+2y=2n,\quad y=x$$

の交点の座標は $\left(\frac{2n}{3},\ \frac{2n}{3}\right)$ である．よって，領域 E は次図のような 3 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$\left(\frac{\boxed{2}n}{\boxed{3}},\ \frac{2n}{3}\right)$ を頂点とする三角形の周および内部である．

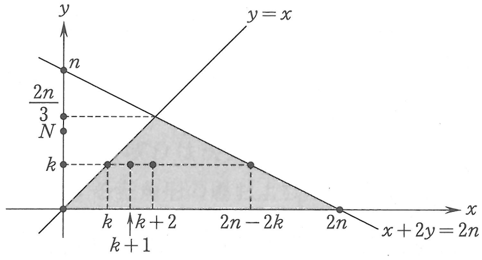


$\frac{2n}{3}$ 以下の最大の整数を N とする．整数 k が $0\leqq k\leqq N$ を満たすとき，E に含まれる格子点で直線 $y=k$ 上にあるものは，次図より

⬅ 領域 E に含まれる格子点の y 座標の最大値が N である．

$$(k,\ k),\ (k+1,\ k),\ (k+2,\ k),\ \cdots,\ (2n-2k,\ k)$$

の $(2n-2k)-k+1=\boxed{2}n-\boxed{3}k+\boxed{1}$ 個である.



(2)と同様に，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$ の各々のときの E に含まれる格子点で直線 $y=k$ 上の点の個数を加えると，E に含まれる格子点の個数が求まる．$2n-3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ は，項数 $N+1$，初項 $2n+1$，末項 $2n-3N+1$ の等差数列の一般項であるから，E に含まれる格子点の個数は

$$\frac{N+1}{2}\{(2n+1)+(2n-3N+1)\}$$
$$=\frac{(N+1)(4n-3N+2)}{2} \qquad \cdots ①$$

である．

n が3の倍数のとき，m を自然数として，$n=3m$ と表される．このとき

$$\frac{2n}{3}=\frac{2\cdot 3m}{3}=2m$$

であるから，$\frac{2n}{3}$ 以下の最大の整数 N は $N=\boxed{2}m$ である．

よって，E に含まれる格子点の個数は，① に $N=2m=\frac{2n}{3}$ を代入して

$$\frac{\left(\frac{2n}{3}+1\right)\left(4n-3\cdot\frac{2n}{3}+2\right)}{2}$$
$$=\frac{(n+\boxed{1})(\boxed{2}n+\boxed{3})}{\boxed{3}}$$

である．

n を3で割った余りが1のとき，m を自然数として，$n=3m-2$ と表される．このとき

$$\frac{2n}{3}=\frac{2\cdot(3m-2)}{3}=2m-\frac{4}{3}$$

であるから，$\frac{2n}{3}$ 以下の最大の整数 N は $N=\boxed{2}m-\boxed{2}$ である．よって，E に含まれる格子点の個数は，① に $N=2m-2=2\cdot\frac{n+2}{3}-2=\frac{2n-2}{3}$ を代入して

$$\frac{\left(\frac{2n-2}{3}+1\right)\left(4n-3\cdot\frac{2n-2}{3}+2\right)}{2}$$

$$=\frac{(n+2)(2n+1)}{3}$$

である．

n を 3 で割った余りが 2 のとき，m を自然数として，$n=3m-1$ と表される．このとき

$$\frac{2n}{3}=\frac{2\cdot(3m-1)}{3}=2m-\frac{2}{3}$$

であるから，$\frac{2n}{3}$ 以下の最大の整数 N は $N=\boxed{2}m-\boxed{1}$ である．よって，E に含まれる格子点の個数は，① に

$N=2m-1=2\cdot\frac{n+1}{3}-1=\frac{2n-1}{3}$ を代入して

$$\frac{\left(\frac{2n-1}{3}+1\right)\left(4n-3\cdot\frac{2n-1}{3}+2\right)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+3)}{3}$$

である．