第2問　微分法・積分法

$$f(x)=-x^2+2x$$
$$=-(x-1)^2+1$$

より，放物線 C の頂点 A の座標は $\left(\boxed{1},\ \boxed{1}\right)$ である．

また，

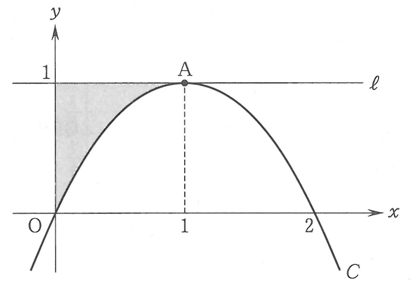
$$f'(x)=-2x+2$$

である．A における C の接線 ℓ の傾きは $f'(1)=0$ であるから，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{1}$$

である．

C と ℓ と y 軸で囲まれた図形は下図の影の部分である．



この図形の面積を T とすると

$$T=\int_0^1\{1-(-x^2+2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-1+1$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}.$$

$0<t<1$ とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線を m とする．

$f'(t)=\boxed{-2}\,t+\boxed{2}$ であるから，m の方程式は

$$y-(-t^2+2t)=(-2t+2)(x-t)$$

すなわち

$$y=(-2t+2)x+t^{\boxed{2}}$$

である．

ℓ と m の方程式から y を消去すると

$$1=(-2t+2)x+t^2$$
$$2(t-1)x=(t-1)(t+1)$$

となり，$0<t<1$ より $t-1\neq0$ であるから

$$x=\frac{t+1}{2}$$

導関数

$(x^n)'=nx^{n-1}$ （n は自然数），

$(c)'=0$ 　　　（c は定数）．

微分係数

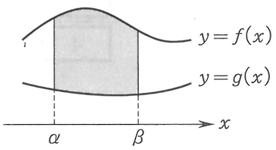
関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きである．

C のグラフから読み取ることもできる．

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$．C は積分定数）

であり，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta$$
$$=F(\beta)-F(\alpha).$$

接線の方程式

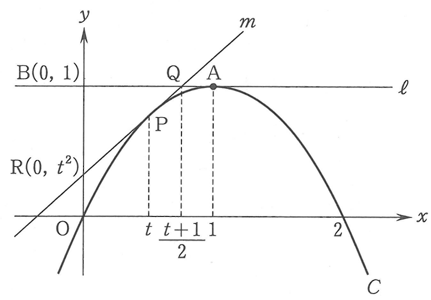
曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

を得る．よって，ℓ と m の交点Qの座標は $\left(\dfrac{t+\boxed{1}}{\boxed{2}},\ 1\right)$ である．

2点B，RをB$(0,\ 1)$，R$(0,\ t^2)$ とする．

点Bは ℓ と y 軸の交点であり，点Rは m と y 軸の交点である．



三角形BQRの面積 U は

$\angle \mathrm{QBR}=\dfrac{\pi}{2}$．

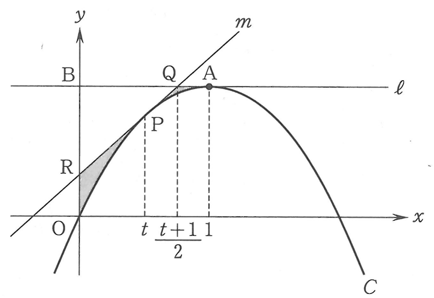
$0<t<1$ より

$$\mathrm{BR}=|1-t^2|=1-t^2.$$

$$\begin{aligned} U&=\frac{1}{2}\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BR}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{2}\cdot(1-t^2)\\ &=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}(t+\boxed{1})(\boxed{1}-t^2) \end{aligned}$$

である．

C と m と y 軸で囲まれた図形と C と ℓ と m で囲まれた図形は，下図の影の部分である．



この影の部分の面積が S であるから

$$\begin{aligned} S&=T-U\\ &=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}(t+1)(1-t^2)\\ &=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}t^3+\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}t^2-\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}t+\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}} \end{aligned}$$

である．S を t で微分すると

$$\begin{aligned} S'&=\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\\ &=\frac{1}{4}(3t-1)(t+1) \end{aligned}$$

$m:y=g(x)$ とすると，C と m と y 軸で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^t\{g(x)-f(x)\}\,dx=\frac{1}{3}t^3$$

であり，C と ℓ と m で囲まれた図形の面積は

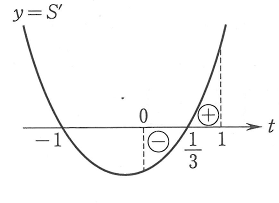
$$\begin{aligned} &\int_t^{\frac{t+1}{2}}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\ &\qquad+\int_{\frac{t+1}{2}}^1\{1-f(x)\}\,dx\\ &=-\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t+\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

これらの和が S であるとして，S を求めてもよい．

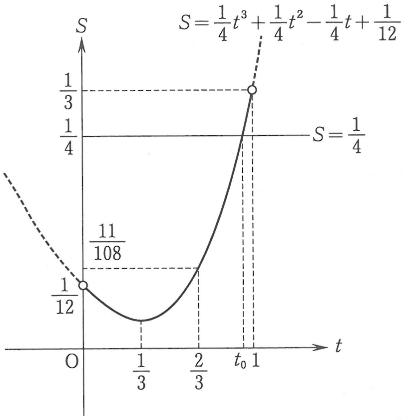
となり，$0<t<1$ における S の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
S'		$-$	0	$+$	
S	$\left(\frac{1}{12}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{27}$	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{3}\right)$

← S' の符号は，$y=S'$ のグラフを描くと分かりやすい．



よって，t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，S は $t=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ のとき最小値 $\frac{\boxed{1}}{\boxed{27}}$ をとる．



$0<t<1$ において $S=\frac{1}{4}$ を満たす t の値を t_0 とすると，上のグラフから，t_0 は $\frac{2}{3}<t_0<1$ を満たす．よって，$\boxed{ホ}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

← $\frac{11}{108}<\frac{27}{108}=\frac{1}{4}$.