第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕

(1)
$$\log_2 x=\log_4(2x+3). \qquad \cdots ①$$

①において真数は正だから

$$x>0 \quad \text{かつ} \quad 2x+3>0$$

より，$x>\boxed{0}$ である．このとき

$$\log_4(2x+3)=\frac{\log_2(2x+3)}{\log_2 4}$$

底の変換

$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$M>0$ のとき

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\log_2(2x+3)$$

$\log_2 4=\log_2 2^2=2.$

であるから，①は

$$\log_2 x=\frac{1}{2}\log_2(2x+3)$$
$$2\log_2 x=\log_2(2x+3)$$
$$\log_2 x^2=\log_2(2x+3)$$

$x>0$ のとき

$2\log_2 x=\log_2 x^2.$

より

$$x^{\boxed{2}}=2x+3$$

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

$\log_a M=\log_a N \iff M=N.$

と変形できる．さらに

$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$

となるから，$x>0$ とあわせて，①の解は $x=\boxed{3}$ である．

(2)　$k>0$ とし，x の方程式

$$\log_2 x=\log_4(2x+3)+k \qquad \cdots ②$$

を考える．

②において真数は正だから $x>0$ である．このとき，②は

$$\log_2 x=\frac{1}{2}\log_2(2x+3)+k$$
$$2\log_2 x=\log_2(2x+3)+2k$$
$$\log_2 x^2=\log_2(2x+3)+\log_2 2^{2k}$$

$2k=\log_2 2^{2k}.$

$$\log_2 x^2=\log_2\left\{(2x+3)\cdot 2^{2k}\right\}$$

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN.$

より

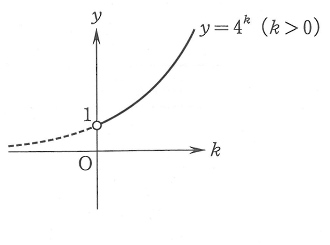
$$x^2=\boxed{4}^k(2x+3) \qquad \cdots ③$$

$2^{2k}=(2^2)^k=4^k.$

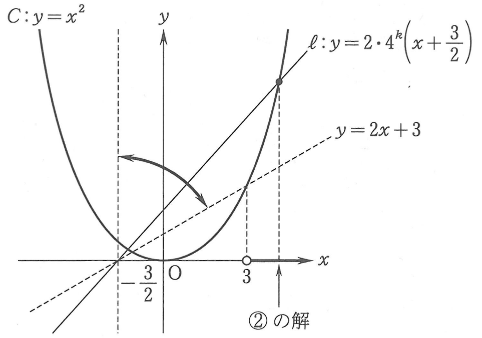
と変形できる．②の解は③を満たす正の実数 x である．③の実数解は放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=2\cdot 4^k\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ の交点の x 座標であるから，$k>0$ のとき

ℓ は点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通り，傾きが $2\cdot 4^k$ の直線を表す．

$$(\text{直線}\ \ell\ \text{の傾き})=2\cdot 4^k>2$$



であることに注意して，次図より



← k がすべての正の実数をとって変化するとき，ℓ は $x>3$ を満たす C 上のすべての点を通る．

② の解のとり得る値の範囲は $x>\boxed{3}$ である．

また，② の解が 6 のとき，③ に $x=6$ を代入して

$$6^2=4^k\cdot(2\cdot6+3)$$

$$4^k=\frac{12}{5}$$

より，$k=\log_4\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{5}}$ である．

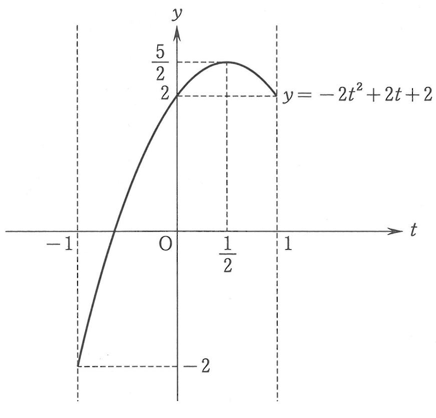
［2］

(1)　$y=\cos2x+2\sin x+1.\ (0\leqq x<2\pi)$

$\cos2x=\boxed{1}-\boxed{2}\sin^2x$ であるから，$t=\sin x$ とおくと

← 2倍角の公式．

$$\begin{aligned}y&=(1-2\sin^2x)+2\sin x+1\\&=1-2t^2+2t+1\\&=\boxed{-2}t^2+\boxed{2}t+\boxed{2}\\&=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}.\end{aligned}$$



$0\leqq x<2\pi$ のとき $-1\leqq t\leqq1$ であるから，y は $t=\frac{1}{2}$ のと

← $0\leqq x<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin x\leqq1$.

き，すなわち $x=\dfrac{\pi}{\boxed{6}}$，$\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ をとり，$t=-1$ のとき，すなわち $x=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{-2}$ をとる．

(2)　$y=\sin x$ のグラフを y 軸方向に $\boxed{1}$ だけ平行移動すると，$y=\sin x+1$ のグラフとなる．

$y=\cos x$ のグラフを x 軸に関して対称移動すると，$y=-\cos x$ のグラフとなる．よって，$\boxed{\text{ヒ}}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

$\sin x+\cos x=\sqrt{\boxed{2}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{\boxed{4}}\right)$ であるから，

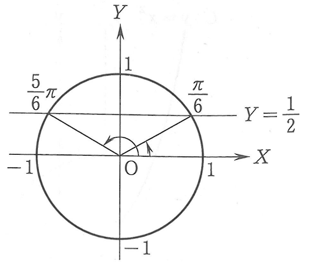
$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動すると

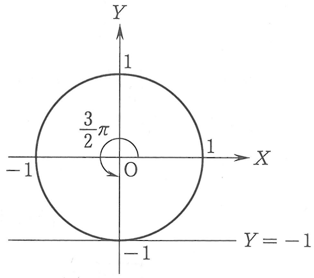
$$\begin{aligned} y&=\sqrt{2}\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right\} \\ &=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &=\sqrt{2}\cos x \end{aligned}$$

すなわち

$$y=\sqrt{2}\cos x$$

のグラフとなる．よって，$\boxed{\text{ホ}}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

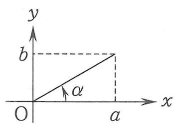




曲線 $y=f(x)$ を x 軸に関して対称移動した曲線の方程式は
$$y=-f(x).$$

三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$



曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に p だけ平行移動した曲線の方程式は
$$y=f(x-p).$$