第5問　確率分布と統計的な推測

(1)　確率変数 X の確率分布は次の表のようになる．

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

よって，X の平均(期待値) $E(X)$ は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2}{5}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}$$

である．また，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{2}{5}+2^2\cdot\frac{2}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$=\frac{\boxed{14}}{\boxed{25}}$$

である．

(2)　ある一人の参加者が最後まで退場せず残るのは，3回連続して整数1を表示させるときであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

である．次に，ゲームの参加者100人のうち，最後まで退場せず残った人の数が Y であるから

$$P(Y=r)={}_{100}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{8}\right)^r\left(\frac{7}{8}\right)^{100-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

が成り立つ．よって，確率変数 Y は

$$\text{二項分布 } B\left(\boxed{100},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}\right)$$

に従うから，Y の平均 $E(Y)$ は

$$E(Y)=100\cdot\frac{1}{8}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{2}}$$

であり，Y の標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$\sigma(Y)=\sqrt{100\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}}=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

である．

平均(期待値)，分散

確率変数 X のとり得る値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とすると，X の平均(期待値) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k.$$

また，X の分散 $V(X)$ は，$E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k\qquad\cdots(*)$$

または

$$V(X)=E(X^2)-m^2.\qquad\cdots(**)$$

ここでは (**) を用いた．

二項分布

n を自然数とする．

確率変数 X のとり得る値が

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

であり，X の確率分布が

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_rp^r(1-p)^{n-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとき，X の確率分布を二項分布といい，$B(n,\ p)$ で表す．

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ として，X の平均(期待値) $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$E(X)=np,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

(3)(i) $m=0$, $\sigma=1$ のとき，確率変数 W は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，正規分布表より

$$\begin{aligned}
&P(-1.8 \leqq W \leqq 0.9)\\
&=P(-1.8 \leqq W \leqq 0)+P(0 \leqq W \leqq 0.9)\\
&=P(0 \leqq W \leqq 1.8)+P(0 \leqq W \leqq 0.9)\\
&=0.4641+0.3159\\
&=0.7800\\
&=0.\boxed{78}
\end{aligned}$$

である．

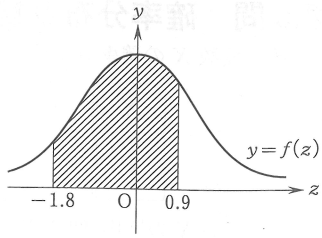
(ii) $\sigma=40$ であることと，400 回ボタンを押したところ，表示された数の平均が 42.00 であったという実験をふまえると，確率変数 W の平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$42.00-1.96\cdot\frac{40}{\sqrt{400}} \leqq m \leqq 42.00+1.96\cdot\frac{40}{\sqrt{400}}$$

であり，これを計算すると

$$\boxed{38}.\boxed{08} \leqq m \leqq \boxed{45}.\boxed{92}$$

である．



標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり，曲線 $y=f(z)$ は y 軸に関して対称である．

母平均の推定

母平均 m，母標準偏差 σ をもつ母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\overline{X}$ は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．すなわち，確率変数

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．よって，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である．

ここでは

$$\overline{X}=42.00$$
$$\sigma=40$$
$$n=400$$

として計算した．