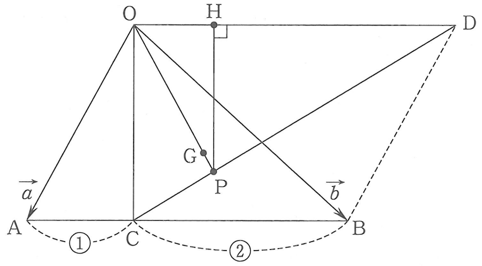
第4問　ベクトル



点Cは辺ABを1：2に内分するから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+2}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\vec{b}.$$

内分点

線分ABを $m:n$ に内分する点をPとすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

点Gは三角形OBCの重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\vec{b}+\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\right\}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}\vec{b}.$$

重心

三角形ABCの重心をGとすると

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

本問の場合

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

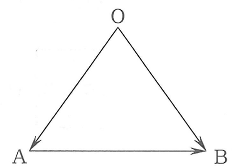
また

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$=\boxed{-}\vec{a}+\vec{b}.$$

ベクトルの差



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

直線OGと直線CDの交点Pが直線OG上にあることから

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OG}\quad(s\text{ は実数})$$

$$=\frac{2}{9}s\vec{a}+\frac{4}{9}s\vec{b}\qquad\cdots①$$

と表される．また，点Pが直線CD上にあることから

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}$$

$$=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DC}\quad(t\text{ は実数})$$

$\overrightarrow{DP}=t\overrightarrow{DC}.$

$$=\overrightarrow{OD}+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})$$

$$=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OD}$$

$$=t\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-t)(-\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\left(\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}t-1\right)\vec{a}+\left(1-\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}t\right)\vec{b}\qquad\cdots②$$

と表される．$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるので，①，②より

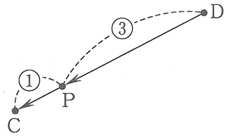
$$\begin{cases} \dfrac{2}{9}s=\dfrac{5}{3}t-1, \\ \dfrac{4}{9}s=1-\dfrac{2}{3}t \end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて

$$s=\frac{\boxed{9}}{\boxed{8}},\quad t=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}.$$

← α, β, α', β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき
「 $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$
$\iff \alpha=\alpha'$ かつ $\beta=\beta'$. 」

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であるから，点Pは線分CDを $1:\boxed{3}$ に内分する点である．

← 

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $|\vec{a}|=3$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{6}$ より

$$2=3\cdot|\vec{b}|\cdot\frac{1}{6}.$$

ゆえに，$|\vec{b}|=\boxed{4}$.

← **内積**
$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$

点Pから直線ODに引いた垂線と直線ODの交点Hが直線OD上にあることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad(k\text{ は実数})\\&=-k\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

と表される．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{0} \qquad \cdots③$$

が成り立つ．ここで

← **垂直条件**
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
「$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$」

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(-k\vec{a}+k\vec{b})-\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=-\left(k+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(k-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\end{aligned}$$

← ①に $s=\dfrac{9}{8}$ を代入して
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

であるから，③より

$$\left\{-\left(k+\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(k-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0.$$

よって

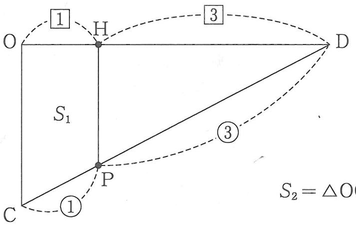
$$\left(k+\frac{1}{4}\right)|\vec{a}|^2+\left\{-\left(k+\frac{1}{4}\right)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\}\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(k-\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2=0$$

$$\left(k+\frac{1}{4}\right)\cdot3^2-\left(2k-\frac{1}{4}\right)\cdot2+\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot4^2=0$$

← $|\vec{a}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $|\vec{b}|=4$.

$$21k-\frac{21}{4}=0$$

$$k=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}.$$



$S_2 = \triangle \mathrm{OCD}$

上図より

$$\triangle \mathrm{DHP} = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DO}} \cdot \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{DC}} \cdot \triangle \mathrm{DOC}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_2$$

$$= \frac{9}{16} S_2$$

であるから

$$S_1 = \triangle \mathrm{OCD} - \triangle \mathrm{DHP}$$

$$= S_2 - \frac{9}{16} S_2$$

$$= \frac{7}{16} S_2.$$

したがって

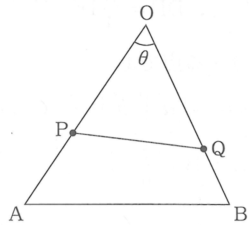
$$S_1 : S_2 = \frac{7}{16} S_2 : S_2$$

$$= \frac{7}{16} : 1$$

$$= \boxed{7} : \boxed{16}.$$

⬅ $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{4} \overrightarrow{\mathrm{OD}}$.

⬅



$$\frac{\triangle \mathrm{OPQ}}{\triangle \mathrm{OAB}} = \frac{\frac{1}{2} \mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \sin\theta}{\frac{1}{2} \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \sin\theta}$$

$$= \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}.$$