第3問　数　列

(1)　等比数列 $\{a_n\}$ の公比を $r\ (>0)$ とする．

$a_3=4$，$a_5=16$ より

$$r^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{16}{4}=4.$$

$r>0$ であるから，$r=2$.

これを $a_1r^2=4$ に代入して，$4a_1=4$ となるから

$$a_1=1.$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の初項は $\boxed{1}$，公比は $\boxed{2}$ である．

また

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=\boxed{2}^n-\boxed{1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

したがって，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

$a_3=a_1r^2$，$a_5=a_1r^4$ より

$$\frac{a_5}{a_3}=r^2.$$

等比数列の和

初項 a，公比 $r\ (\neq 1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

(2)
$$b_1=1,\quad b_{n+1}=3b_n+2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

このとき

$$b_{n+1}+\boxed{1}=\boxed{3}(b_n+1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できるので，数列 $\{b_n+1\}$ は初項が $b_1+1=\boxed{2}$，公比が 3 の等比数列であるから

$$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$$

すなわち

$$b_n=\boxed{2}\cdot\boxed{3}^{n-1}-\boxed{1}$$

である．

したがって，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

漸化式

$$b_{n+1}=pb_n+q\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$(p,\ q \text{ は定数，} p\neq 0,\ 1)$$

は

$$\alpha=p\alpha+q$$

を満たす α を用いて

$$b_{n+1}-\alpha=p(b_n-\alpha)$$

と変形できる．

(3)　$a_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=4,\quad a_4=8.$$

$a_1=1$，数列 $\{a_n\}$ の公比は 2.

c_n は a_n を 3 で割ったときの余り $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから

$$c_1=1,\quad c_2=2,\quad c_3=1,\quad c_4=2.$$

これと $b_n=2\cdot3^{n-1}-1$，$d_n=b_nc_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$d_1=b_1=\boxed{1},$$
$$d_2=2b_2=2\cdot5=\boxed{10},$$
$$d_3=b_3=\boxed{17},$$
$$d_4=2b_4=2\cdot53=\boxed{106}$$

である．

また，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_{n+2}-a_n=2^{n+1}-2^{n-1}$$
$$=4\cdot 2^{n-1}-2^{n-1}$$
$$=3\cdot 2^{n-1}$$

$\Leftarrow$ $2^{n+1}=2^2\cdot 2^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}$.

より，$a_{n+2}-a_n$ は3の倍数であるから，a_{n+2} と a_n を3で割ったときの余りは等しい．すなわち

$$c_{n+2}=c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．したがって

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき，}\ c_n=c_1=1,\ d_n=b_nc_n=b_n, \\ n\text{ が偶数のとき，}\ c_n=c_2=2,\ d_n=b_nc_n=2b_n \end{cases}$$

である．

よって

$$\sum_{k=1}^{2n}d_k=(d_1+d_3+\cdots+d_{2n-1})+(d_2+d_4+\cdots+d_{2n})$$
$$=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+2(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}b_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{n}b_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+2b_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(2\cdot 3^{2k-2}-1)+2(2\cdot 3^{2k-1}-1)\}$$

$\Leftarrow$ $b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$.

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(2\cdot 9^{k-1}-1)+(4\cdot 3\cdot 9^{k-1}-2)\}$$

$\Leftarrow$ $3^{2k-2}=3^{2(k-1)}=9^{k-1}$.
$3^{2k-1}=3\cdot 3^{2k-2}=3\cdot 9^{k-1}$.

$$=\sum_{k=1}^{n}(14\cdot 9^{k-1}-3)$$
$$=\frac{14(9^n-1)}{9-1}-3n$$

$\Leftarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ (r\neq 1)$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$.

$$=\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}\cdot\boxed{9}^{\,n}-\boxed{3}\,n-\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}$$

である．