第2問　微分法・積分法

$$f(x)=2x^3+ax^2-4ax.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{6}x^2+\boxed{2}ax-\boxed{4}a$$

である．

導関数

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，

$(c)'=0$ (c は定数)．

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるとき

$$f'(1)=\boxed{0}$$

であり

$$f'(1)=6+2a-4a=6-2a$$

であるから

$$a=3$$

である．このとき

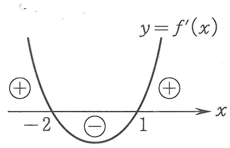
$6-2a=0.$

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x$$

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$



$f'(x)$ の符号はグラフを用いると調べやすい．

よって，$x=1$ で $f(x)$ は確かに極値をとるから $a=\boxed{3}$ である．

また，$f(x)$ は $x=\boxed{-2}$ において極大値 $\boxed{20}$ をとる．

曲線 C 上の点 O における C の接線 ℓ の傾きは

$$f'(0)=-12$$

であるから，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{-12}x$$

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t)$$

であり，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

である．曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標を求めると

$$2x^3+3x^2-12x=-12x$$

$$2x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x=0,\ -\frac{3}{2}$$

であるから，C と ℓ の点 O 以外の共有点 A の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}},\ \boxed{18}\right)$ である．

$y=-12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=18.$

(1)　曲線 C 上の点 T における C の接線の傾きは

$$f'(t)$$

であるから，T における C の接線が ℓ と平行になる条件は，

$\mathrm{T}(t,\ f(t)).$

$f'(t)=-12$ より

$$6t^2+6t-12=-12$$
$$t(t+1)=0$$
$$t=0,\ -1$$

である．これらのうち $-\dfrac{3}{2}<t<0$ を満たすのは $t=-1$ であるから，このときの点Tの座標は $\left(\boxed{-1},\ \boxed{13}\right)$ である．

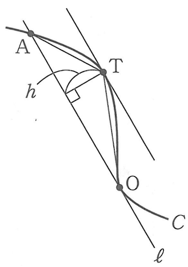
⬅ $\begin{cases} y=f(-1) \\ \quad =2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1) \\ \quad =13. \end{cases}$

(2) 点Tと直線 ℓ の距離を h とする．t が $-\dfrac{3}{2}<t<0$ の範囲を動くとき，三角形OATの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+18^2}\cdot h=\frac{3\sqrt{145}}{4}\cdot h$$

⬅ $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2},\ 18\right)$.

と表され，これが最大となるのは h が最大となるとき，すなわち，点Tにおける曲線 C の接線が ℓ と平行になるときである．



このときの h は，点 $(-1,\ 13)$ と直線 $\ell:12x+y=0$ の距離であるから

$$h=\frac{|12(-1)+13|}{\sqrt{12^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{145}}$$

⬅ **点と直線の距離**

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\ell:12x+y=0$, $\mathrm{T}(-1,\ 13)$.

である．よって，三角形OATの面積の最大値は

$$\frac{3\sqrt{145}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{145}}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

放物線 $D:y=px^2+qx+r$ は点Oを通るから

$$r=\boxed{0}$$

であり，$y=px^2+qx$ となる．さらに，放物線 D は点Aも通るから

$$18=p\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+q\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

⬅ $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2},\ 18\right)$.

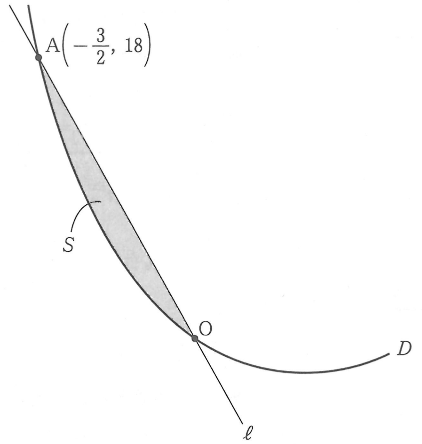
より

$$q=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}p-\boxed{12}$$

である．よって

$$D:y=px^2+\left(\frac{3}{2}p-12\right)x\quad (p>0)$$

と表される．



直線 ℓ と放物線 D で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left[(-12x)-\left\{px^2+\left(\frac{3}{2}p-12\right)x\right\}\right]dx$$

$$=-p\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(x+\frac{3}{2}\right)x\,dx$$

$$=-p\left[-\frac{1}{6}\left\{0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^3\right]$$

$$=\frac{9}{16}p$$

である．よって，$S=\dfrac{3}{4}$ を満たす p の値は $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ である．

【$S=\dfrac{9}{16}p$ を求める別解】

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left[(-12x)-\left\{px^2+\left(\frac{3}{2}p-12\right)x\right\}\right]dx$$

$$=-p\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)dx$$

$$=-p\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}$$

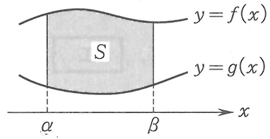
$$=p\left\{\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{9}{16}p.$$

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および2直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.$$

$$\frac{9}{16}p=\frac{3}{4}.$$

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

($n=0$, 1, 2, …, C は積分定数.)

であり，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}=F(\beta)-F(\alpha).$$