第1問　三角関数，指数関数・対数関数

〔1〕

$$f(\theta)=\sin 2\theta+\sin\theta-\cos\theta.$$

(1)

$$f(0)=\sin 0+\sin 0-\cos 0=\boxed{-1},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=\boxed{1}$$

である．

⬅ $\sin 0=0,\ \cos 0=1.$

⬅ $\sin\pi=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0.$

(2)

$$t=\sin\theta-\cos\theta.$$

三角関数の合成により

$$t=\sqrt{\boxed{2}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{\boxed{4}}\right)$$

と変形できる．

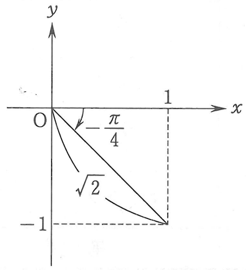
三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき，

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha).$

ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり

$\cos\alpha=\frac{a}{r},\quad \sin\alpha=\frac{b}{r}.$



θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$\theta-\frac{\pi}{4}$ は

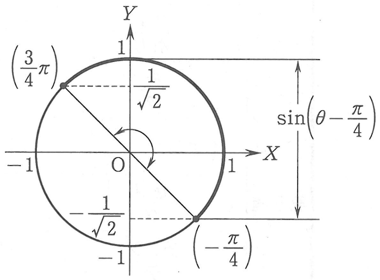
$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$ の範囲を動く．したがって，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

であり，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{-1}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{2}}$$

である．



(3)　2倍角の公式により $\sin 2\theta=\boxed{2}\sin\theta\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}t^2&=(\sin\theta-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\\&=\boxed{1}-\sin 2\theta\end{aligned}$$

である．したがって，$f(\theta)$ は t を用いて

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sin 2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\\&=1-t^2+t\\&=\boxed{-}t^2+t+\boxed{1}\end{aligned}$$

と表される．

2倍角の公式

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$

⬅ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$

⬅ $\sin\theta-\cos\theta=t,$
$\sin 2\theta=1-t^2.$

ここで，$g(t)=-t^2+t+1\ (-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと

$$g(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

より，$g(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ において最大値 $\frac{5}{4}$ をとる．

θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くときの $f(\theta)$ の最大値は，t が

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の範囲を動くときの $g(t)$ の最大値に等しい.

よって, $f(\theta)$ は $t=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ において最大値 $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}}$ をとる.

$t=\dfrac{1}{2}$ のときの θ を α とするので

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

すなわち

$$\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{1}{2}$$

である. これと $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より

$$\sin^2\alpha+\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$2\sin^2\alpha-\sin\alpha-\frac{3}{4}=0$$

$$\sin\alpha=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$$

を得る. さらに, $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ より

$$\sin\alpha=\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

である.

← $t=\sin\theta-\cos\theta$ において, $t=\dfrac{1}{2}$, $\theta=\alpha$ とした.

← $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ より

$0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$.

[2]

$$f(x)=\log_2 x,\quad g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x+4.$$

(1)

$$f(2)=\log_2 2=\boxed{1}.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\frac{1}{4}=\boxed{-2}.$$

← **対数**

$a>0$, $a \neq 1$, $M>0$ のとき

$a^x=M \iff x=\log_a M$.

$2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

(2) 底の変換公式により

$$g(x)=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{4}}+4$$

$$=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\log_2 x+4$$

と表される.

← **底の変換**

$a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c \neq 1$ のとき

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

よって, x の方程式 $f(x)=2g(x)$ は

$$\log_2 x=2\left(-\frac{1}{2}\log_2 x+4\right)$$

$$\log_2 x=\boxed{4}$$

と変形されるから，その解は

$$x=2^4=\boxed{16}$$

である．

(3) 不等式 $f(x)\leqq g(x)$ は

$$\log_2 x\leqq -\frac{1}{2}\log_2 x+4$$

$$3\log_2 x\leqq 8$$

$$\log_2 x^3\leqq \log_2 2^8$$

と変形され，底の 2 は 1 より大きいので

$$0<x^3\leqq 2^8 \quad \cdots ①$$

である．さらに

$$6^3=216<2^8=256<7^3=343$$

より，① を満たす自然数 x は

$$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

である．

よって，不等式 $f(x)\leqq g(x)$ を満たす自然数 x の個数は $\boxed{6}$ である．

⬅ $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，r は実数のとき $\log_a M^r=r\log_a M$.

⬅ $a>1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a M\leqq \log_a N \iff M\leqq N$.