第2回

1

[1]. $f(\theta) = \sin 2\theta + \sin\theta - \cos\theta$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$

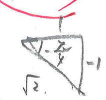
$t = \sin\theta - \cos\theta$ とする.

(1) $f(0) = 0 + 0 - 1 = -1$ アイ

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$

$= 0 + 1 - 0 = 1$ ウ

(2). $t = \sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ エ オ



$0 \leq \theta \leq \pi$

$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \leq 1$

$-1 \leq \sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$

$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ カキ ク

(3). $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より. ケ

$t^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$= \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 - \sin 2\theta$ コ

$\sin 2\theta = 1 - t^2$

$f(\theta) = 1 - t^2 + t$

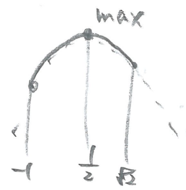
$= -t^2 + t + 1$ サシ ス

$= -(t^2 - t) + 1$

$= -\{(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\} + 1$

$= -(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$

$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ より



$t = \frac{1}{2}$ セソ で

最大値 $\frac{5}{4}$ タチ.

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ —①

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

① $\cos\alpha = \sin\alpha - \frac{1}{2}$ 代入

$\sin^2\alpha + (\sin\alpha - \frac{1}{2})^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha + \frac{1}{4} - 1 = 0$

$2\sin^2\alpha - \sin\alpha - \frac{3}{4} = 0$

$8\sin^2\alpha - 4\sin\alpha - 3 = 0$

$\sin\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{8}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$\sin\alpha \geq 0$ より $\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ ツテト

[2]. $x>0$

$f(x) = \log_2 x$,
$g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 4$.

(1) $f(2) = \log_2 2 = 1$ イ

$f(\frac{1}{4}) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$. ウエ

(2). $g(x) = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}} + 4 = \dfrac{-1}{2}\log_2 x + 4$ オ〜カ

$f(x) = 2g(x)$

$\log_2 x = 2\cdot(-\frac{1}{2}\log_2 x + 4)$

$= -\log_2 x + 8$

$2\log_2 x = 8 \quad \log_2 x = 4$ キ

$x = 2^4 = 16$ クケ

(3) $f(x) \leqq g(x)$

$f(x) - g(x) \leqq 0$

$\log_2 x - (\log_{\frac{1}{4}} x + 4) \leqq 0$

$\log_2 x - (-\frac{1}{2}\log_2 x + 4) \leqq 0$

$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x - 4 \leqq 0$

$\frac{3}{2}\log_2 x \leqq 4$

$\log_2 x \leqq \frac{8}{3}$

$x \leqq 2^{\frac{8}{3}}$

$x^3 \leqq 2^8 = 256$

$6^3 < 2^8 < 7^3$ より

$0 < 6^3 < x^3 < 7^3$

$0 < 6 < x < 7$

$0 < x < 7$.

6 コ

$16 \times 16 = 96, 16 \to 256$
$25 \times 5 = 125$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 =$
$36 \times 6 = 216$
$49 \times 7 = 343$

[3].

C: $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a$ ア〜ウ

$x=1$ で極小値をとる.

$f'(1) = 6 + 2a - 4a = 0$ エ

$-2a = -6 \quad a = 3$ オ

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0 \quad x = -2, 1$

$f(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2)$

$= -16 + 12 + 24 = 20$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗

$x = -2$ で極大値 20 カキ クケ

$O(0,0)$ における接線 l.

$f'(0) = -12$.

$l: y = -12x$ コ〜シ

C: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
l: $y = -12x$

$2x^3 + 3x^2 - 12x = -12x$

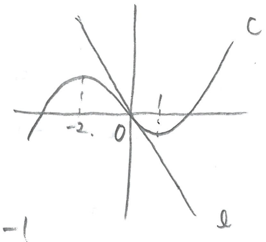
$2x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2(2x+3) = 0 \quad x = 0, -\frac{3}{2}$

$y = -12 \times (-\frac{3}{2}) = 18 \qquad A(-\frac{3}{2}, 18)$ ス〜チ

$T(t, f(t))$

(1) $-\frac{3}{2} < t < 0$ で



$f'(t) = 6t^2 + 6t - 12 = f'(0)$

$6t^2 + 6t - 12 = -12$

$6t^2 + 6t = 0$

$t(t+1) = 0 \quad t = 0, -1$

$f(-1) = 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 - 12\cdot(-1)$

$= -2 + 3 + 12 = 13$. $\qquad T(-1, 13)$ ツ〜ト

(2). $-\frac{3}{2}<t<0$ で △OAT の面積

$T(t, f(t))$ と $y=-12x$ の距離が最大のとき S_{OAT} も最大

$12x+y=0$ より

$$\frac{|12t+f(t)|}{\sqrt{12^2+1^2}}=\frac{|12t+2t^3+3t^2-12t|}{\sqrt{144+1}}$$

$$=\frac{|2t^3+3t^2|}{\sqrt{145}}$$

$g(t)=2t^3+3t^2$ とすると。

$g'(t)=6t^2+6t=0$

$t(t+1)=0$

$t=0, -1$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
g'	$+$	0	$-$		$+$
g	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$

$g(-1)=2\cdot(-1)+3\cdot 1=-2+3=1$

距離 $=\frac{1}{\sqrt{145}}$

底辺 OA とすると。

$OA=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+18^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+324}$

$=\sqrt{\frac{9+1296}{4}}=\sqrt{\frac{1305}{4}}=\frac{3\sqrt{145}}{2}$

$S_{OAT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{145}}\cdot\frac{3\sqrt{145}}{2}=\frac{3}{4}$ ニヌ

$(0,0), \left(-\frac{3}{2}, 18\right)$ を通る

$y=px^2+qx+r$ より

$0=r$

$18=\frac{9}{4}p-\frac{3}{2}q$

$12=\frac{3}{2}p-q$

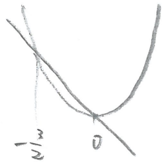
$q=\frac{3}{2}p-12$ ネノハ　　$r=0$ ヒ

$$\begin{cases} l: y=-12x \\ D: y=px^2+\left(\frac{3}{2}p-12\right)x \quad (p>0) \end{cases}$$

$px^2+\left(\frac{3}{2}p-12\right)x=-12x$

$px^2+\frac{3}{2}px=0$

$x\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$　$x=0, -\frac{3}{2}$



$\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left\{-\left(px^2+\frac{3}{2}px\right)\right\}dx=S_{OAT}$

$=-\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{3p}{4}x^2\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}=\frac{3}{4}$

$\frac{p}{3}\left(-\frac{27}{8}\right)+\frac{3p}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$-\frac{3p}{2}+\frac{9}{4}p=1$

$-6p+9p=4$

$3p=4$　　$p=\frac{4}{3}$ ヘホ

3

(1) $r > 0$.

$a_n = a r^{n-1}$

$\begin{cases} a_3 = a r^2 = 4. \\ a_5 = a r^4 = 16 \end{cases}$

$4r^2 = 16$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

$r>0$ より $r = 2$.

$a \cdot 2^2 = 4$. $4a = 4$. $a = 1$.

初項 1 ア 公比 2 イ

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-1}$

$= \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$ ウ エ オ

(2). $b_1 = 1$. $b_{n+1} = 3b_n + 2$.

$x = 3x+2$ $2x = -2$. $x = -1$.

$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ カ キ

(初) $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ ク

(公) 3

$b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ ← ケ

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. コ サ シ

(3) $\begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 2 \\ \hline 34 \end{array}$

$a_n = 1, 2, 4, 8, 16, \cdots$

$c_n = 1, 2, 1, 2, 1, \cdots$

$d_n = b_n c_n$

$b_n = 1, 5, 17, 53 \cdots$

$d_1 = 1 \times 1 = 1$ ス

$d_2 = 2 \times 5 = 10$ セソ $d_3 = 1 \times 17 = 17$ タチ

$d_4 = 2 \times 53 = 106$ ツテト

$\sum_{k=1}^{2n} d_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot b_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot b_{2k}$

$\sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \{2 \cdot 3^{(2k-1)-1} - 1\} = \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot 3^{2k-2} - 1)$

$= 2 \sum_{k=1}^{n} 3^{2(k-1)} - \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 2 \cdot \frac{9^n - 1}{9-1} - n$

$= \frac{1}{4} \cdot (9^n - 1) - n = \frac{1}{4} \cdot 9^n - n - \frac{1}{4}$

$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot b_{2k} = 2 \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot 3^{2k-1} - 1)$

$= 4 \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 3^{2(k-1)} - 2 \sum_{k=1}^{n} 1$.

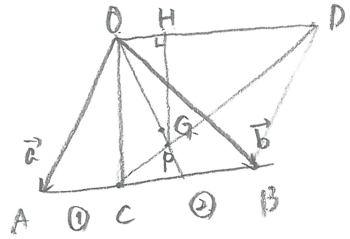
$= 12 \cdot \frac{9^n - 1}{9-1} - 2n$

$= \frac{6}{4} \cdot (9^n - 1) - 2n = \frac{6}{4} \cdot 9^n - 2n - \frac{6}{4}$

$\sum_{k=1}^{2n} d_k = \left(\frac{1}{4} + \frac{6}{4}\right) \cdot 9^n - (n + 2n) - \left(\frac{1}{4} + \frac{6}{4}\right)$

$= \frac{7}{4} \cdot 9^n - 3n - \frac{7}{4}$ ナニヌ...

[4].



$\vec{OC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ ア〜エ

$\vec{OG}=\frac{\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$

$=\frac{\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}{3}$

$=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}+\vec{b}}{9}$

$=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ オ〜ク

$\vec{OD}=\vec{AB}$ より

$=-\vec{OA}+\vec{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$ ケ

$\vec{OP}=s\vec{OG}=\frac{2}{9}s\vec{a}+\frac{4}{9}s\vec{b}$ —①

$\vec{OP}=t\vec{OC}+(1-t)\vec{OD}$

$=t\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-t)(-\vec{a}+\vec{b})$

$=\left(\frac{2}{3}t-1+t\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}t+1-t\right)\vec{b}$

$=\left(\frac{5}{3}t-1\right)\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}t\right)\vec{b}$ —②

コサ　シス

①,②より

$\frac{2}{9}s=\frac{5}{3}t-1$ —③

$\frac{4}{9}s=1-\frac{2}{3}t$ —④

③×2 を ④へ代入

$\frac{10}{3}t-2=1-\frac{2}{3}t$

$\frac{12}{3}t=3$

$t=\frac{3}{4}$

③より

$s=\frac{9}{2}\left(\frac{5}{3}t-1\right)$

$=\frac{15}{2}t-\frac{9}{2}$

$=\frac{15}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{9}{2}$

$=\frac{45-36}{8}$

$=\frac{9}{8}$

$s=\frac{9}{8},\ t=\frac{3}{4}$ セ〜チ

$\vec{OP}=\frac{3}{4}\vec{OC}+\frac{1}{4}\vec{OD}$

$=\frac{3\vec{OC}+\vec{OD}}{1+3}$

Pは CD を 1:3 に内分する ツ

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2,\ |\vec{a}|=3,\ \cos AOB=\frac{1}{6}$ とする.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$ より

$2=3\cdot|\vec{b}|\cdot\frac{1}{6}$

$|\vec{b}|=4$ テ

$\vec{OH}=k\vec{OD}=-k\vec{a}+k\vec{b}$, $\vec{PH}\cdot\vec{OD}=0$ ト より

$\vec{PH}\cdot\vec{OD}=(-\vec{OP}+\vec{OH})\cdot\vec{OD}=-\vec{OP}\cdot\vec{OD}+\vec{OH}\cdot\vec{OD}$

$=-\frac{3\vec{OC}+\vec{OD}}{4}\cdot\vec{OD}+k\vec{OD}\cdot\vec{OD}$

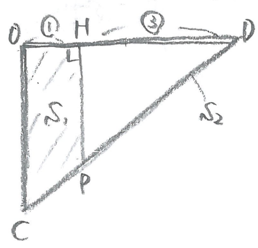
$=-\frac{3}{4}\vec{OC}\cdot\vec{OD}-\frac{1}{4}|\vec{OD}|^2+k|\vec{OD}|^2$

$=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})+\left(k-\frac{1}{4}\right)(-\vec{a}+\vec{b})^2$

$=-\frac{1}{4}(-2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)+\left(k-\frac{1}{4}\right)(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$=-\frac{1}{4}\underbrace{(-18+2+16)}_{0}+\left(k-\frac{1}{4}\right)(9-4+16)$

$=\left(k-\frac{1}{4}\right)\times21=0.$　$k-\frac{1}{4}=0.$　$k=\frac{1}{4}$ ナニ



$\vec{OC}\cdot\vec{OD}=0$ となるので、

$\vec{OC}\perp\vec{OD}$ となり

$\triangle OCD \sim \triangle HPD$ (相似比 4:3)

面積比 16:9

$S_1=16-9=7$

$S_1:S_2=7:16$ ヌ〜ノ