第５問　確率分布と統計的な推測

(1)　$X_1=1$ となるのは

a_1 が３または６

のときであるから，$X_1=1$ となる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ である．

$X_2=1$ となるのは

a_2 が３または６

かつ

a_1 が a_2 以外の数

のときであるから，$X_2=1$ となる確率は $\dfrac{2\cdot5}{6\cdot5}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ である．

(2)　確率変数 X_1 の平均(期待値) $E(X_1)$ は

$$E(X_1)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$$

であり，分散 $V(X_1)$ は

$$V(X_1)=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{\boxed{2}}{\boxed{9}}$$

である．また，確率変数 X_2 の平均 $E(X_2)$ は

$$E(X_2)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

である．

確率変数 X_1+X_2 の平均 $E(X_1+X_2)$ は

$$\begin{aligned}E(X_1+X_2)&=E(X_1)+E(X_2)\\&=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\\&=\frac{\boxed{10}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

である．

X_1+X_2	X_1X_2	$(X_1,\ X_2)$	確率
2	1	(1, 1)	$\dfrac{2\cdot1}{6\cdot5}=\dfrac{1}{15}$
3	2	(1, 2) または (2, 1)	$2\cdot\dfrac{2\cdot4}{6\cdot5}=\dfrac{8}{15}$
4	4	(2, 2)	$\dfrac{4\cdot3}{6\cdot5}=\dfrac{6}{15}$

上の表より，分散 $V(X_1+X_2)$ は

$$V(X_1+X_2)=2^2\cdot\frac{1}{15}+3^2\cdot\frac{8}{15}+4^2\cdot\frac{6}{15}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{\boxed{16}}{\boxed{45}}$$

であり，確率変数 X_1X_2 の平均 $E(X_1X_2)$ は

平均(期待値)，分散

確率変数 X のとり得る値を

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$

とすると，X の平均(期待値) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k.$$

また，X の分散 $V(X)$ は $E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k \quad\cdots(*)$$

または

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2p_k-m^2. \quad\cdots(**)$$

ここでは (**) を用いた．

平均(期待値)の性質

$X,\ Y$ を確率変数，$a,\ b$ を定数とする．このとき

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

が成り立つ．

３と６の２枚を取り出す．

余事象を考えて

$$1-\frac{1}{15}-\frac{6}{15}=\frac{8}{15}$$

としてもよい．

1，2，4，5のうち２枚を取り出す．

$$E(X_1X_2)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{8}{15}+4\cdot\frac{6}{15}=\frac{\boxed{41}}{\boxed{15}}$$

である.

(3) (2)の表より $P(X_1+X_2=4)=\dfrac{2}{5}$ であるから, $Y=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 600)$ となる確率は

$$P(Y=k)={}_{600}\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(1-\frac{2}{5}\right)^{600-k}$$

である. よって, 確率変数 Y は二項分布 $B\left(600,\ \dfrac{2}{5}\right)$ に従うから, Y の平均 $E(Y)$ は

$$E(Y)=600\cdot\frac{2}{5}=\boxed{240}$$

であり, 分散 $V(Y)$ は

$$V(Y)=600\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\boxed{144}$$

である.

二項分布

n を自然数とする.
確率変数 X のとり得る値が

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

であり, X の確率分布が

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k\,p^k(1-p)^{n-k}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとき, X の確率分布を二項分布といい, $B(n,\ p)$ で表す.

二項分布の平均(期待値), 分散

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき, $q=1-p$ とすると, X の平均(期待値) $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X)=np,$$
$$V(X)=npq$$

である.