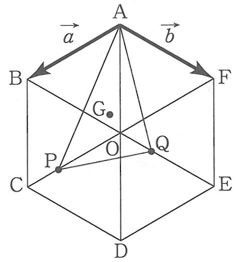
第 4 問　ベクトル



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FO}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OE}=\vec{b}$ である．これより

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\vec{b}$$

である．また，$\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\vec{a}+\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}=\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\vec{b},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}\vec{a}+\frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}\vec{b}\end{aligned}$$

である．

直線 AG と直線 DE の交点を R とする．点 R は直線 AG 上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AG}$，すなわち

$$\overrightarrow{AR}=\frac{8}{9}k\vec{a}+\frac{7}{9}k\vec{b} \qquad \cdots ①$$

と表される．また，点 R は直線 DE 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+t\vec{a}$，すなわち

$$\overrightarrow{AR}=2(\vec{a}+\vec{b})+t\vec{a}=(\boxed{2}+t)\vec{a}+\boxed{2}\,\vec{b} \qquad \cdots ②$$

と表される．

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，① と ② より

$$\begin{cases}\frac{8}{9}k=2+t,\\ \frac{7}{9}k=2\end{cases}$$

を得る．これより

⬅ $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$
$=\vec{a}+\vec{b}$.

⬅ **三角形の重心**
三角形 ABC の重心を G とすると
$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

⬅ 直線 DE は，点 D を通り $\vec{a}$ に平行な直線である．

⬅ $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

⬅ s，t，s'，t' は実数とする．
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき
$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$
$\Longleftrightarrow$ $s=s'$ かつ $t=t'$.

$$k=\frac{\boxed{18}}{\boxed{7}},\quad t=\frac{\boxed{2}}{\boxed{7}}$$

である．

　したがって

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{7}\vec{a}$$

であり

$$|\overrightarrow{DR}|=|\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AD}|=\frac{2}{7}|\vec{a}|=\frac{2}{7}$$

である．よって，三角形ADRの面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DR}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{7}}$$

である．

　また，② より

$$\overrightarrow{AR}=\left(2+\frac{2}{7}\right)\vec{a}+2\vec{b}$$

$$=\frac{2}{7}(8\vec{a}+7\vec{b})$$

であることと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$ より

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{2}{7}(8\vec{a}+7\vec{b})\right|^2$$

$$=\left(\frac{2}{7}\right)^2|8\vec{a}+7\vec{b}|^2$$

$$=\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(8^2\times|\vec{a}|^2+2\times8\times7\times(\vec{a}\cdot\vec{b})+7^2\times|\vec{b}|^2\right)$$

$$=\left(\frac{2}{7}\right)^2\left\{64\times1^2+112\times\left(-\frac{1}{2}\right)+49\times1^2\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{7}\right)^2\times57.$$

　よって

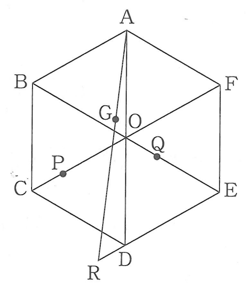
$$|\overrightarrow{AR}|=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{57}}}{\boxed{7}}$$

である．

⬅ $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+t\vec{a}$，$t=\frac{2}{7}$ より．

⬅ $|\vec{a}|=1.$

⬅ $\mathrm{AD}=2$，　$\angle\mathrm{ADR}=\frac{2}{3}\pi.$



⬅ **ベクトルの内積**

$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\frac{2}{3}\pi$.

⬅ $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}.$