第3問　数　列

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差は

$$a_2-a_1=5-2=\boxed{3}$$

であるから，一般項は

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3$$
$$=\boxed{3}n-\boxed{1}$$

である．また，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$=\frac{n\{2+(3n-1)\}}{2}$$
$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

← **等差数列の一般項**

公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

← **等差数列の和**

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

(2)　数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n は

$$T_n=n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすから

$$b_1=T_1=1^2=\boxed{1}$$

であり，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=T_n-T_{n-1}$$

である．$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ にはそれぞれ $\boxed{②}$，$\boxed{①}$ が当てはまる．

← $n\geqq 2$ のとき

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n$$
$$=T_{n-1}+b_n.$$

これより

$$b_n=n^2-(n-1)^2$$
$$=2n-1$$

となる．これは $n=1$ のときも成り立つから

$$b_n=\boxed{2}n-\boxed{1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

← $b_n=2n-1$ の右辺に $n=1$ を代入すると

$$2\cdot 1-1=1=b_1$$

となり，$n=1$ のときも成り立つ．

(3)　数列 $\{b_n\}$ は正の奇数を小さいものから順に並べたものである．

← $\{b_n\}:1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots.$

第1群　第2群　第3群

$$\{b_n\}:\underbrace{b_1,\ \overset{}{\underset{c_1}{\underset{\|}{b_2}}},}_{a_1\text{個}}\ |\ \underbrace{b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ \underset{c_2}{\underset{\|}{b_7}},}_{a_2\text{個}}\ |\ \underbrace{b_8,\ \cdots,\ c_3,}_{a_3\text{個}}\ |\ \cdots$$

第 $k-1$ 群　第 k 群

$$\cdots,\ |\ \underbrace{\cdots\cdots,\ c_{k-1},}_{a_{k-1}\text{個}}\ |\ \underbrace{\cdots\cdots,\ c_k,}_{a_k\text{個}}\ |\ \cdots$$

$c_1=b_2$, $c_2=b_{\boxed{7}}$ であり

$$a_1+a_2+a_3=S_3=15$$

より，c_3 は数列 $\{b_n\}$ の第 15 項であるから，$c_3=b_{\boxed{15}}$ である．

同様に

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=S_k=\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k$$

より，c_k は数列 $\{b_n\}$ の第 $\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k$ 項であるから

$$\begin{aligned}c_k&=b_{\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k}\\&=2\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)-1\\&=\boxed{3}k^{\boxed{2}}+k-\boxed{1}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

である．

301 が第 n 群 $(n\geqq 2)$ に含まれるとすると

$$c_{n-1}<301\leqq c_n \qquad \cdots(☆)$$

が成り立つ．

$$c_9=251,\quad c_{10}=309$$

より，(☆) は $n=10$ のとき成り立つ．よって，301 は第 $\boxed{10}$ 群の項である．

(前頁) bn = 2n − 1 から

第 10 群に含まれる項は

bnは公差2であることがわかる

初項 c_9+2，末項 c_{10}，項数 a_{10}

の等差数列(公差 2)をなすから，その総和は

$$\begin{aligned}\frac{a_{10}\{(c_9+2)+c_{10}\}}{2}&=\frac{29\cdot(253+309)}{2}\\&=29\cdot 281\\&=\boxed{8149}\end{aligned}$$

である．

【$\boxed{ナニヌネ}$ の別解】

$$c_9=b_{126},\quad c_{10}=b_{155}$$

より，第 10 群に含まれる項の総和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=127}^{155}b_k&=\sum_{k=1}^{155}b_k-\sum_{k=1}^{126}b_k\\&=T_{155}-T_{126}\\&=155^2-126^2\\&=(155+126)\cdot(155-126)\\&=281\cdot 29\\&=8149.\end{aligned}$$

⬅ 数列 $\{b_n\}$ の項は
第 1 群に　2 $(=a_1)$ 個，
第 2 群に　5 $(=a_2)$ 個，
第 3 群に　8 $(=a_3)$ 個
含まれる．

⬅ $S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$

⬅ $b_n=2n-1.$

⬅ $c_k=b_{S_k}$
$=2S_k-1$
$=3k^2+k-1$
としてもよい．

⬅ 第 9 群　第 10 群

$$\cdots|\cdots\cdots,\ \underset{c_9}{\overset{\|}{251}},\ |\underbrace{\underset{c_9+2}{\overset{\|}{253}},\ \cdots,\ 301,\ \cdots,\ \underset{c_{10}}{\overset{\|}{309}}}_{a_{10}\text{ 個}},\ |\cdots$$

⬅ $a_{10}=29$，$c_9+2=253$，$c_{10}=309$.

⬅ $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k.$