## 第2問　微分法・積分法

$$f(x)=x^3-x.$$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{1}$$
$$=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

である．$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↗ |

よって，関数 $f(x)$ は，

$$x=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\ \text{で極小値}\ \frac{\boxed{-2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

をとり，

$$x=\frac{\boxed{-}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\ \text{で極大値}\ \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

をとる．

点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 $\ell$ の方程式は，$f(1)=0$，$f'(1)=2$ より

$$y=2(x-1)+0$$

すなわち

$$y=\boxed{2}x-\boxed{2}$$

である．

$g(x)=px^2-qx$ $(p\neq0)$ より

$$g'(x)=2px-q$$

である．

放物線 $y=g(x)$ が点 $(1,\ f(1))$ において $\ell$ と接するので，$f(1)=g(1)$ より

$$p-q=\boxed{0} \qquad \cdots①$$

であり，$f'(1)=g'(1)$ より

$$\boxed{2}p-q=\boxed{2} \qquad \cdots②$$

である．①，② より

$$p=\boxed{2},\quad q=\boxed{2}$$

であり，$g(x)=2x^2-2x$ である．

方程式 $f(x)=g(x)$ を解くと

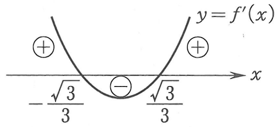
$$x^3-x=2x^2-2x$$
$$x^3-2x^2+x=0$$

**導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$　($n$ は正の整数)，

$(c)'=0$　　　($c$ は定数)．

$f'(x)$ の符号の変化は $y=f'(x)$ のグラフをかくとわかりやすい．




**接線の方程式**

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

である．

$$x(x-1)^2=0$$
$$x=0,\ 1$$

である．よって，曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ の共有点のうち点 $(1,\ f(1))$ でない方の点の $x$ 座標は $\boxed{0}$ である．

$0<t<1$ のとき

$$f(t)-g(t)=(t^3-t)-(2t^2-2t)$$
$$=t(t-1)^2>0$$

であるから，$f(t)>g(t)$ が成り立つ．$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

$0<t<1$ のとき，線分 AB の長さを $h(t)$ とすると

$$h(t)=f(t)-g(t)$$
$$=t^3-2t^2+t$$

であるから

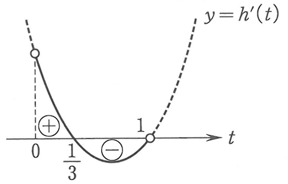
$$h'(t)=3t^2-4t+1$$
$$=(3t-1)(t-1)$$

である．

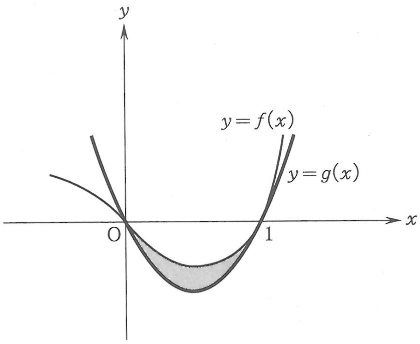
$0<t<1$ における $h(t)$ の増減は次の表のようになる．

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(t)$ | $(0)$ | ↗ | $\frac{4}{27}$ | ↘ | $(0)$ |

⬅ $h'(t)$ の符号の変化は $y=h'(t)$ のグラフをかくとわかりやすい．



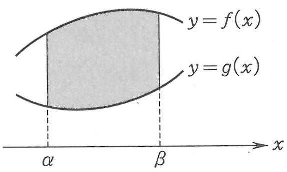

よって，$t$ が $0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 AB の長さの最大値は $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{27}}$ である．




$0<x<1$ において $f(x)>g(x)$ である．曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ で囲まれた部分は上図の影の部分であり，その面積を $S$ とすると

$$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,dx$$

**面積**




⬅ 上図の影の部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

である．

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$$

である.

**不定積分**

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

(ただし, $n$ は0または正の整数であり, $C$ は積分定数)