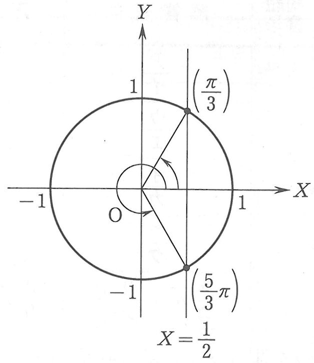
第1問　三角関数，指数関数

〔1〕

(1)　$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ であり，$0\leqq x<2\pi$ の範囲で $\cos x=\frac{1}{2}$ を満たす x の値は

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi$$

である．



(2)　$\sin 2x=\boxed{2}\sin x\cos x$ であるから，x の方程式

$$\sqrt{2}\sin 2x-2a\sin x-\sqrt{6}\cos x+\sqrt{3}a=0 \qquad \cdots(*)$$

は

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x-2a\sin x-\sqrt{6}\cos x+\sqrt{3}a=0$$
$$2\sin x(\sqrt{2}\cos x-a)-\sqrt{3}(\sqrt{2}\cos x-a)=0$$
$$\left(\boxed{2}\sin x-\sqrt{\boxed{3}}\right)\left(\sqrt{\boxed{2}}\cos x-a\right)=0$$

と変形できるので

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots①$$

または

$$\cos x=\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \cdots②$$

となる．

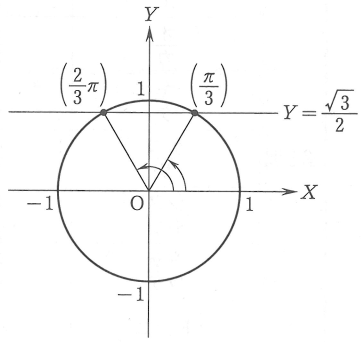
2倍角の公式

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$

$0\leqq x<2\pi$ における (*) の解のうち，① を満たすものは

$$x=\frac{\pi}{\boxed{3}},\ \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi \qquad \cdots③$$

である．



$0\leqq x<2\pi$ において (*) が異なる3個の実数解をもつのは

(i)　② を満たす解が1個だけあり，それが ③ のいずれとも異なる

(ii)　② を満たす解が2個あり，そのうちの1個だけが ③ のいずれかと一致する

の二つの場合が考えられる．

(i) について，

② を満たす解が1個だけであるから

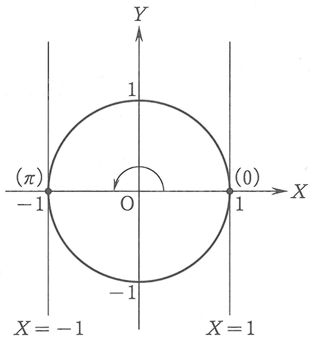
$\cos x=\frac{a}{\sqrt{2}}.$ $\cdots②$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=1 \quad \text{または} \quad -1$$

すなわち

$$a=\sqrt{2} \quad \text{または} \quad -\sqrt{2}$$

である.



$0 \leqq x < 2\pi$ において $\cos x = X$ を満たす解が1個となるのは，$X=1$ または -1 のときであり，

$X=1$ のとき解は $x=0$.

$X=-1$ のとき解は $x=\pi$.

・$a=\sqrt{2}$ のとき

②は $\cos x=1$ となり，これを満たす解は $x=0$. これは③のいずれとも異なるので $a=\sqrt{2}$ は適する.

（このとき，(*)の解は，$x=0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ である.）

・$a=-\sqrt{2}$ のとき

②は $\cos x=-1$ となり，これを満たす解は $x=\pi$. これは③のいずれとも異なるので $a=-\sqrt{2}$ は適する.

（このとき，(*)の解は，$x=\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π である.）

(ii) について，

・②を満たす解のうちの1個が $\frac{\pi}{3}$ のとき

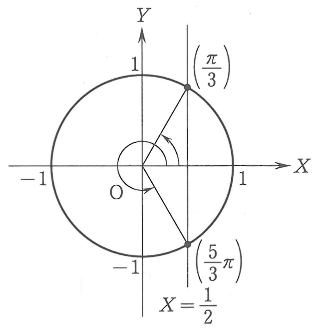
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ であるから，$\frac{1}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ より

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

このとき②は $\cos x=\frac{1}{2}$ となり，これを満たす解は

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi.$$



したがって，(*)の解は

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

の3個であり，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ は適する.

・②を満たす解のうちの1個が $\frac{2}{3}\pi$ のとき

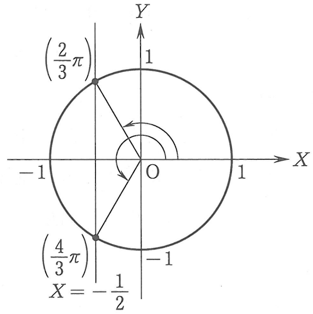
$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{a}{\sqrt{2}}$ であるから，$-\frac{1}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ より

$$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$.

このとき②は $\cos x=-\frac{1}{2}$ となり，これを満たす解は

$$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi.$$



したがって，(*)の解は

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

の3個であり，$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ は適する.

以上より，求める a の値は

$$a=\pm\sqrt{\boxed{2}},\quad \pm\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

である．

〔2〕

$$f(x)=-2^x+(\sqrt{2})^{x+1}+4.$$

$t=(\sqrt{2})^x$ とすると

$$2^x=\{(\sqrt{2})^2\}^x=\{(\sqrt{2})^x\}^2=t^2,$$
$$(\sqrt{2})^{x+1}=(\sqrt{2})^x\cdot(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}\,t$$

であるから，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=-t^{\boxed{2}}+\sqrt{\boxed{2}}\,t+4$$

と表される．

$$g(t)=-t^2+\sqrt{2}\,t+4$$

とおく．

← **指数法則**

$(a^p)^q=a^{pq}=(a^q)^p,$

$a^{p+q}=a^p\cdot a^q.$

（a は正の実数，p，q は実数）

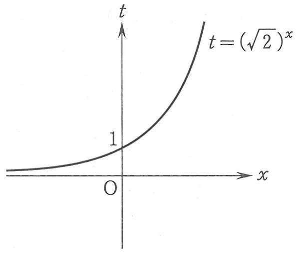
(1)　$t=(\sqrt{2})^x$ において，x が実数全体を動くとき，t のとり得る値の範囲は $t>\boxed{0}$ であるから，「x が実数全体を動くときの $f(x)$ の最大値」は「$t>0$ における $g(t)$ の最大値」に等しい．

$$g(t)=-\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

であるから，$g(t)$ ($t>0$) は，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとる．

また，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{2})^{-1}$ のとき，$(\sqrt{2})^x=(\sqrt{2})^{-1}$ より $x=-1$ である．

よって，$x=\boxed{-1}$ において $f(x)$ は最大値 $\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{2}}$ をとる．

← 

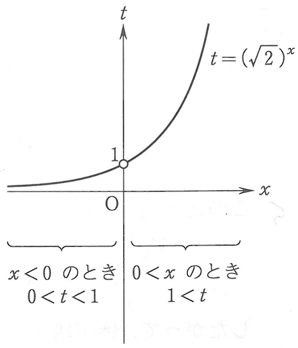
← $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{-1}.$

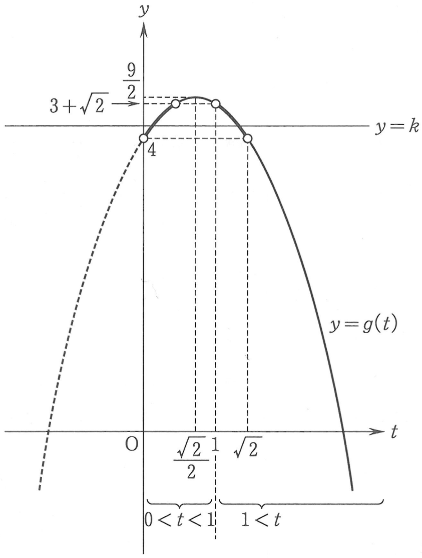
(2)　$(\sqrt{2})^0=1$ であり，$t=(\sqrt{2})^x$ は増加関数であるから

$$\begin{cases} x<0 \text{ のとき，} 0<t<\boxed{1} \\ x>0 \text{ のとき，} 1<t \end{cases}$$

である．

したがって，「$f(x)=k$ を満たす x が2個あり，それらが異符号である」ことは「$g(t)=k$ を満たす t (>0) が2個あり，そのうち，一方が $0<t<1$，他方が $1<t$ にある」ことである．

← 



$g(t)=k$ を満たす実数 t は，放物線 $y=g(t)$ の $t>0$ の部分と直線 $y=k$ の共有点の t 座標である．$g(0)=4$，$g(1)=3+\sqrt{2}$ に注意すると，求める k の値の範囲は，グラフより

$$\boxed{4}<k<\boxed{3}+\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

⬅ $y=k$ のグラフが $y=g(t)$ のグラフの太線部分と交わる範囲である．