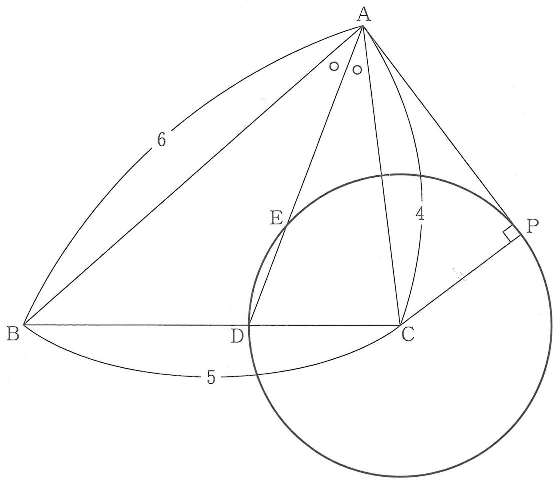
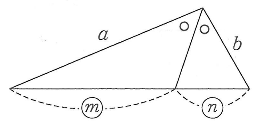
第5問　図形の性質



(1)　直線 AD は ∠BAC の二等分線であるから,

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$
$$=6:4$$
$$=3:2$$

角の二等分線の定理



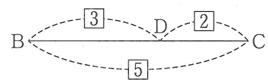
$m:n=a:b.$

すなわち

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

であり,

$$\mathrm{DC}=\frac{2}{3+2}\mathrm{BC}$$
$$=\frac{2}{5}\cdot 5$$
$$=\boxed{2}$$



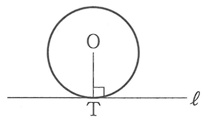
である.

直線 AP は円 C の接線であるから,

$$\angle \mathrm{APC}=90^\circ$$

である.

円の接線と半径

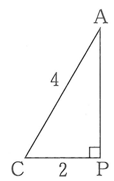


$\mathrm{OT}\perp \ell.$

(O は中心, T は接点)

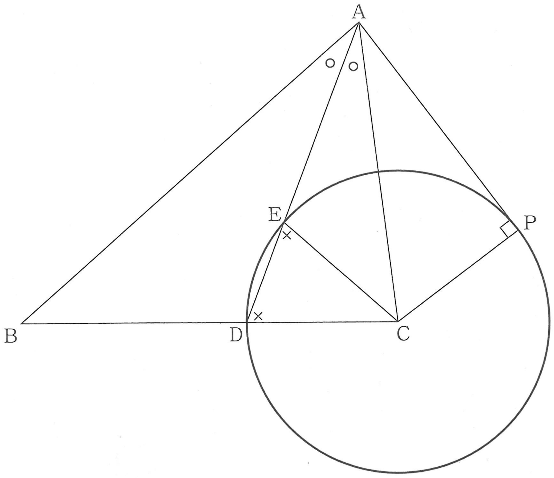
△ACP は, AC＝4, CP＝CD＝2, ∠APC＝90° の直角三角形であるから, 三平方の定理を用いると,

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{CP}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-2^2}$$
$$=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$$



である.

(2)



$\triangle$ABD と $\triangle$ACE において，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAE},$$

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ADB} &= 180^\circ - \angle \mathrm{CDE} \\ &= 180^\circ - \angle \mathrm{CED} \\ &= \angle \mathrm{AEC}\end{aligned}$$

であるから，$\triangle$ABD と $\triangle$ACE は相似である．

よって，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものは $\boxed{0}$ である．

したがって，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AE} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

より，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AE} = 6 : 4$$

$$6\mathrm{AE} = 4\mathrm{AD}$$

$$\mathrm{AE} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\mathrm{AD}$$

であるから，円 C と 2 直線 AD, AP に方べきの定理を用いると，

$$\mathrm{AE} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AP}^2$$

$$\frac{2}{3}\mathrm{AD} \cdot \mathrm{AD} = (2\sqrt{3})^2$$

$$\mathrm{AD}^2 = 18$$

$$\mathrm{AD} = \boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

← 直線 AD は $\angle$BAC の二等分線．

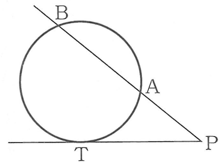
← CD＝CE であるから，
$\angle \mathrm{CDE} = \angle \mathrm{CED}$．

← あとの(注)参照．

← $\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{ACE}$．

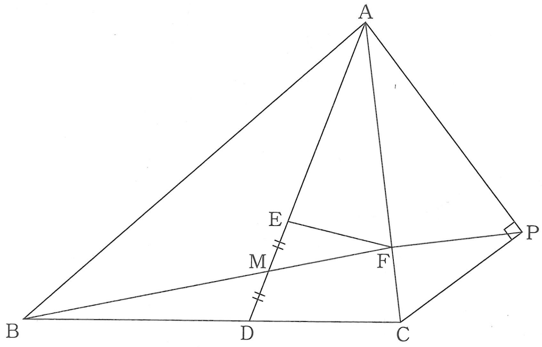
← AB＝6，AC＝4．

方べきの定理



$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$（T は接点）．

$\mathrm{AP} = 2\sqrt{3}$．

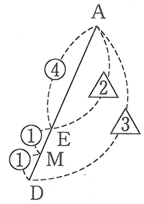


$$AE=\frac{2}{3}AD,\ EM:MD=1:1$$

であるから，

$$\frac{AM}{MD}=5$$

である．



よって，△ADC と直線 BF にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

$$5\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

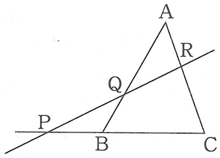
$$\frac{CF}{FA}=\frac{1}{3}$$

であるから，

$$AF:FC=3:1$$

である．

メネラウスの定理



$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CR}{RA}=1.$$

$\frac{AM}{MD}=5$，BD : DC $=3:2$.

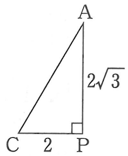
したがって，△AFP の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\frac{AF}{AC}(\triangle ACP\text{ の面積})$$

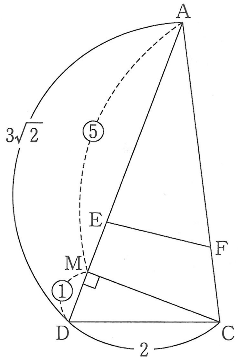
$$=\frac{AF}{AC}\left(\frac{1}{2}CP\cdot AP\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\cdots①$$



である．



$$\mathrm{DM}=\frac{1}{5+1}\mathrm{AD}=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であるから，直角三角形 CDM に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{CM}=\sqrt{\mathrm{CD}^2-\mathrm{DM}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

であり，

$$(\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CM}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

である．

よって，△AEF の面積を S_2 とすると，$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}$，$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}=\frac{3}{4}$ より，

$$S_2=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}}(\triangle\mathrm{ACD}\text{ の面積})$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{7}}{4} \qquad \cdots ②$$

である．

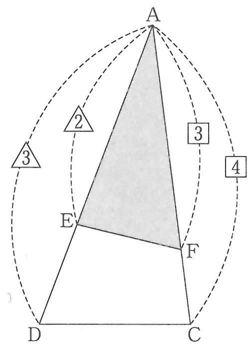
①，② より，

$$(\text{四角形 AEFP の面積})=S_1+S_2$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{7}}{4}$$
$$=\frac{\boxed{6}\sqrt{3}+\boxed{3}\sqrt{7}}{\boxed{4}}$$

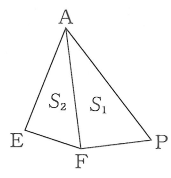
である．

⬅ △CDE は CD＝CE の二等辺三角形であり，M は辺 DE の中点であるから，∠CMD＝90°．

⬅



⬅



（$\boxed{\text{カ}}$ についての注）

$\triangle$ABD は鈍角三角形であるが，$\triangle$ACP は直角三角形，$\triangle$ADC は鋭角三角形である．また，

$$AE:AP=\sqrt{2}:\sqrt{3},\quad AB:BD:DA=2:1:\sqrt{2}$$

より，$\triangle$AEP と $\triangle$ABD に長さの比が等しい 2 辺の組は存在しない．

よって，$\triangle$ABD は $\triangle$ACP，$\triangle$ADC，$\triangle$AEP のいずれとも相似でない．

⇐ $AE=2\sqrt{2}$，$AP=2\sqrt{3}$，$AB=6$，$BD=3$，$DA=3\sqrt{2}$．