第３問　場合の数と確率

(1)　1回目に5が書かれた玉を取り出す確率は，

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}} \quad \cdots ①$$

であり，2回目に5が書かれた玉を取り出す確率は，

$$\frac{6\cdot 1}{7\cdot 6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}} \quad \cdots ②$$

である．

← 1回目に5以外の数字が書かれた玉を取り出し，かつ2回目に5が書かれた玉を取り出す．

$\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$ と考えてもよい．

また，1回目に4が書かれた玉を取り出し，かつ2回目に6が書かれた玉を取り出す確率は，

$$\frac{1\cdot 1}{7\cdot 6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{42}} \quad \cdots ③$$

であり，同様に，1回目に6が書かれた玉を取り出し，かつ2回目に4が書かれた玉を取り出す確率も，

$$\frac{1}{42} \quad \cdots ④$$

である．

(2)　1回目の取り出しで終了するのは，1回目に5が書かれた玉を取り出す場合であり，その確率は①より，$\frac{1}{7}$ である．

2回目の取り出しで終了する確率は，

(a)　2回目に5が書かれた玉を取り出す

(b)　1回目に4が書かれた玉を取り出し，かつ2回目に6が書かれた玉を取り出す

(c)　1回目に6が書かれた玉を取り出し，かつ2回目に4が書かれた玉を取り出す

のそれぞれの場合の確率を加えることで得られる．

よって，その確率は，②，③，④より，

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}+\frac{1}{42}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{21}}$$

であり，3回目以降の取り出しで終了する確率は，

$$1-\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{21}\right)=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．

← 1回目の取り出しで終了する確率と，2回目の取り出しで終了する確率を除いた．

4回目の取り出しで終了するのは，

(Ⅰ)　4回目に(A)が起こる

(Ⅱ)　4回目に(B)が起こる

のいずれかの場合である．

(Ⅰ)の確率は，

(ア)　3回目までに4と6が書かれた玉をどちらも取り出さず，4回目に5が書かれた玉を取り出す

(イ)　3回目までに4と6が書かれた玉のどちらか一方を取り出し，4回目に5が書かれた玉を取り出す

のそれぞれの場合の確率を加えることで得られる．

(ア)のとき，1回目から3回目には，①，②，③，⑦の4個の玉から3個を順に取り出すから，その確率は，

$$\frac{(4\cdot 3\cdot 2)\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{1}{35}.$$

である．

(イ)のとき，1回目から3回目については，④，⑥のどちらか一方の玉と，①，②，③，⑦の4個の玉から取り出した2個の合計3個の玉を並べることを考えればよいから，その確率は，

$$\frac{{}_2C_1\cdot {}_4C_2\cdot 3!\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{3}{35} \quad \cdots ⑤$$

である．

(II)のとき，1回目から3回目については，④，⑥のどちらか一方の玉と，①，②，③，⑦の4個の玉から取り出した2個の合計3個の玉を並べることを考え，4回目は，④，⑥のうち取り出していない方の玉を取り出すことを考えればよいから，その確率は，

$$\frac{{}_2C_1\cdot {}_4C_2\cdot 3!\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{3}{35} \quad \cdots ⑥$$

である．

ゆえに，4回目の取り出しで終了する確率は，

$$\left(\frac{1}{35}+\frac{3}{35}\right)+\frac{3}{35}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}} \quad \cdots ⑦$$

である．

また，4回目の取り出しで終了するという条件のもとで，4が書かれた玉または6が書かれた玉を取り出す条件付き確率は，⑤，⑥，⑦より，

$$\frac{\frac{3}{35}+\frac{3}{35}}{\frac{1}{5}}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$$

である．

○○○⑤

○○○⑤

条件付き確率

事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付き確率 $P_A(B)$ は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

4回目の取り出しで終了し，かつ4が書かれた玉または6が書かれた玉を取り出すのは，

(イ)または(II)

のとき．