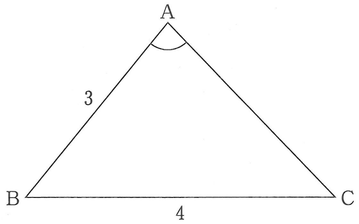
## 第２問　図形と計量，データの分析

〔１〕




$\sin^2\angle CAB+\cos^2\angle CAB=1$ より，

$$\sin\angle CAB=\sqrt{1-\cos^2\angle CAB}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{9}}$$

である．

⬅ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

⬅ $\cos\angle CAB=\frac{1}{9}$.

　余弦定理

$$BC^2=CA^2+AB^2-2CA\cdot AB\cos\angle CAB$$

より，$x$ は２次方程式

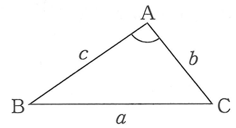
$$4^2=x^2+3^2-2x\cdot 3\cdot\frac{1}{9}$$

すなわち

$$x^2-\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}x-7=0$$

を満たす．

⬅ **余弦定理**




$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

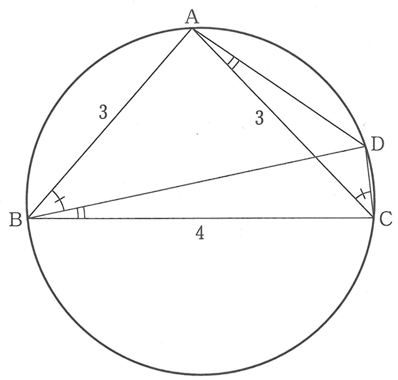
　これより，

$$3x^2-2x-21=0$$
$$(3x+7)(x-3)=0$$

となるから，$x>0$ より，

$$CA=x=\boxed{3}$$

である．



円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{ACD}=\angle \mathrm{ABD},\quad \angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{CBD}$$

であり，

$$\sin\angle \mathrm{ABD}:\sin\angle \mathrm{CBD}=3:1$$

より，

$$\frac{\sin\angle \mathrm{ABD}}{\sin\angle \mathrm{CBD}}=3$$

である．

さらに，$\triangle$ACD に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{DA}}{\sin\angle \mathrm{ACD}}=\frac{\mathrm{CD}}{\sin\angle \mathrm{CAD}}$$

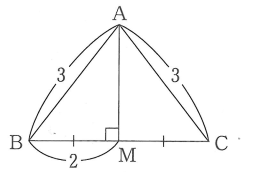
であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{DA}&=\frac{\sin\angle \mathrm{ACD}}{\sin\angle \mathrm{CAD}}\mathrm{CD}\\&=\frac{\sin\angle \mathrm{ABD}}{\sin\angle \mathrm{CBD}}\mathrm{CD}\\&=\boxed{3}\,\mathrm{CD}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

である．

$\triangle$ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\cos\angle \mathrm{ABC}&=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}}\\&=\frac{4^2+3^2-3^2}{2\cdot4\cdot3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$




$\triangle$ABC は AB＝AC の二等辺三角形より，辺 BC の中点を M とすると，AM$\perp$BC であるから，

$$\begin{aligned}\cos\angle \mathrm{ABC}&=\cos\angle \mathrm{ABM}\\&=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

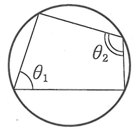
と求めてもよい．

であり，四角形 ABCD は円に内接し，

$$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ADC}=180^\circ$$

が成り立つから，

**円に内接する四角形の性質**

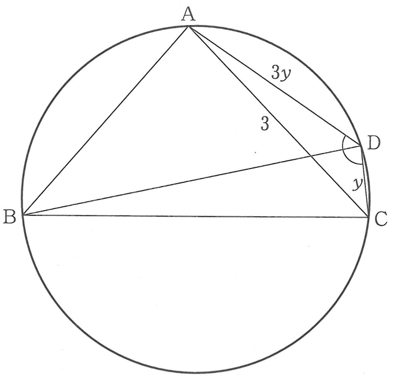



$\theta_1+\theta_2=180^\circ.$

$$\begin{aligned}\cos\angle \mathrm{ADC}&=\cos(180^\circ-\angle \mathrm{ABC})\\&=-\cos\angle \mathrm{ABC}\\&=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$

である．



CD$=y$ とおくと，① より DA$=3y$ であり，△ACD に余弦定理を用いると，

DA$=3$CD.

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

$$3^2=y^2+(3y)^2-2y\cdot 3y\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$y^2=\frac{9}{14}$$

となり，$y>0$ より，

$$\mathrm{CD}=y=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{14}}$$

である．

〔2〕

(1) 30 人全員に対する平均値は，

$$\frac{0.3\times 2+0.6\times 8+1.0\times 12+1.4\times 5+2.0\times 3}{30}$$

$$=\frac{30.4}{30}$$

$$=1.0133\cdots$$

より，$\boxed{1}.\boxed{0}$ である．

分子の値は 30 人の検査値の総和であり，それを 30 で割ったものが求める平均値である．

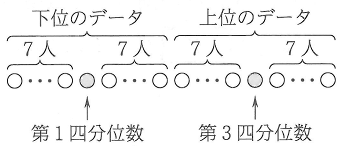
各階級における平均値の総和を 5 で割って，

$$\frac{0.3+0.6+1.0+1.4+2.0}{5}=1.06$$

としてはいけない．

(2) 箱ひげ図より，第 3 四分位数は 1.2 であり，階級 D に属する．よって，$\boxed{ソ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

30 人に関するデータであるから，データを値の小さい方から順に並べたとき，第 3 四分位数は 23 番目の生徒の検査値である．検査値は 0.1 刻みで測定されており，箱ひげ図から読み取れる第 3 四分位数 1.2 は正確な値である．




(3) 修正前の 30 人の検査値を $x_1$，$x_2$，…，$x_{30}$ とし，平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{30}}{30}$$

であり，修正後の 30 人の平均値を $\overline{x'}$ とすると，

$$\overline{x'}=\frac{(x_1-0.1)+(x_2-0.1)+\cdots+(x_{30}-0.1)}{30}$$

$$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{30}}{30}-\frac{0.1\times 30}{30}$$

$$=\overline{x}-0.1$$

であるから，⓪は正しい．

階級 E の修正後の度数は 2 であり，階級 E における平均値は，

修正前の検査値 1.6 は，修正後 1.5 となり，階級 D に属する．

$$\frac{(2.1-0.1)+(2.3-0.1)}{2}=2.1>m_e$$

$m_e=2.0$.

となるから，平均値は修正前より増加する．

よって，①は正しくない．

修正前の偏差

$$x_k - \overline{x} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 30)$$

と修正後の偏差

$$\begin{aligned}(x_k-0.1)-\overline{x'} &= (x_k-0.1)-(\overline{x}-0.1)\\ &= x_k-\overline{x} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 30)\end{aligned}$$

は同じであるから，分散は変化しない．

よって，②は正しい．

修正前の第１四分位数は，箱ひげ図より 0.7 であり，修正後は 0.6 となる．よって，修正前，修正後ともに第１四分位数は階級Ｂに属し，③は正しい．

修正前の第３四分位数は，箱ひげ図より 1.2 であり，修正後は 1.1 となる．したがって，第３四分位数は修正前は階級Ｄ，修正後は階級Ｃに属するから，④は正しくない．

以上より，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$，$\boxed{④}$ である．

分散は，偏差の平方の平均値

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{30}-\overline{x})^2}{30}$$

である．

第１四分位数 0.7 は正確な値である．

〔３〕

各階級の視力変化が 0.4 以上であった生徒の割合は，

階級Ａ … 0，

階級Ｂ … $\dfrac{2}{8}=0.25$，

階級Ｃ … $\dfrac{3+1}{12}=0.33\cdots$，

階級Ｄ … $\dfrac{1+1}{5}=0.4$，

階級Ｅ … $\dfrac{1}{3}=0.33\cdots$

であり，階級Ｄの割合が最も高い．

よって，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．