第1問　数と式，集合と論理，2次関数

〔1〕

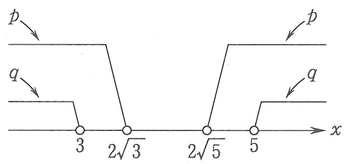
$$p:\ (x-2\sqrt{3})(x-2\sqrt{5})>0,$$
$$q:\ |x-4|>1,$$
$$r:\ x<2a \quad \text{または} \quad x>\sqrt{5}\,a.$$

(1)
$$|x-4|>1$$
を解くと，
$$x-4<-1,\quad 1<x-4$$
$$x<\boxed{3},\quad x>\boxed{5}$$
である．

⬅ $k>0$ のとき，X の不等式 $|X|>k$ の解は，
$$X<-k,\quad k<X.$$

(2)
$$(x-2\sqrt{3})(x-2\sqrt{5})>0$$
を解くと，
$$x<2\sqrt{3},\quad 2\sqrt{5}<x$$
である．

　これと(1)より，条件 p，q はそれぞれ，
$$p:x<2\sqrt{3},\ 2\sqrt{5}<x,$$
$$q:x<3,\ 5<x$$
であり，
$$p \Longrightarrow q \text{ は偽（反例は } x=3\text{）},$$
$$p \Longleftarrow q \text{ は真}$$
であるから，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない．



　よって，$\boxed{ウ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

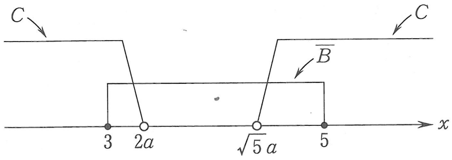
⬅ 条件 s，t について，
$$s \Longrightarrow t \text{ は偽},$$
$$s \Longleftarrow t \text{ は真}$$
であるとき，s は t であるための必要条件であるが，十分条件ではない．

(3)　集合 A，B，C は，
$$A=\{x\,|\,x<2\sqrt{3},\ 2\sqrt{5}<x\},$$
$$B=\{x\,|\,x<3,\ 5<x\},$$
$$C=\{x\,|\,x<2a,\ \sqrt{5}\,a<x\}$$
である．

⬅ $a>0.$

　このとき，
$$U=(\overline{A}\cup\overline{B})\cup C$$
すなわち
$$U=\overline{A\cap B}\cup C$$
であるための必要十分条件は，$A\cap B=B$ より，
$$U=\overline{B}\cup C$$
が成り立つことであり，集合 $\overline{B}=\{x\,|\,3\leqq x\leqq 5\}$，$C$ を数直線上に図示するとき，次のようであればよい．

⬅ **ド・モルガンの法則**
$$\overline{E\cup F}=\overline{E}\cap\overline{F},$$
$$\overline{E\cap F}=\overline{E}\cup\overline{F}.$$



よって，求める条件は，

$$\begin{cases} 3 \leqq 2a, \\ \sqrt{5}\,a \leqq 5 \end{cases}$$

すなわち

$$\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \leqq a \leqq \sqrt{\boxed{5}}$$

である．

［2］

(1)
$$G_1 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 - 8a + 52$$
$$= -(x^2 - 4ax + 4a^2) - 8a + 52$$
$$= -(x - 2a)^2 - 8a + 52 \qquad \cdots ①$$

であるから，G_1 の頂点 P の座標は，

$$\left(\boxed{2}a,\ \boxed{-8}a + \boxed{52}\right)$$

である．

放物線 $y = p(x-q)^2 + r$ の頂点の座標は，

$$(q,\ r)$$

である．

G_1 が x 軸と異なる 2 点で交わるのは，

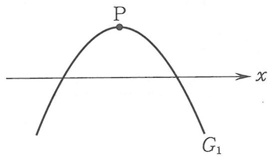
$$(\text{P の } y \text{ 座標}) = -8a + 52 > 0$$

より，

$$a < \frac{\boxed{13}}{\boxed{2}} \qquad \cdots ②$$

のときである．

G_1 は上に凸である放物線．



また，

$$x^2 - 4(a+1)x + 8a + 4 = \left(x - \boxed{2}\right)(x - 4a - 2)$$

であるから，

$$1 \times -2 \longrightarrow -2$$
$$1 \times -4a-2 \longrightarrow -4a-2$$
$$-4(a+1)$$

$$(x-2)(x-4a-2) = 0$$

より，G_2 と x 軸の交点の x 座標は，

$$x = 2,\ 4a+2$$

である．

よって，G_2 が x 軸と異なる 2 点で交わるのは，

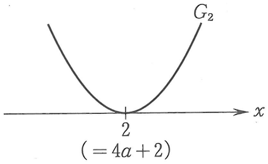
$$2 \neq 4a + 2$$

より，

$$a \neq \boxed{0}$$

のときである．

$2 = 4a + 2$ すなわち $a = 0$ のとき，G_2 と x 軸は $x = 2$（$= 4a + 2$）で接する．



(2)　G_1 が線分 QR (両端を含む)と異なる 2 点で交わるためには，G_1 が x 軸と異なる 2 点で交わること，すなわち②，および $a>0$ より，

$$0<a<\frac{13}{2} \qquad \cdots③$$

が必要である．

$$f(x)=-x^2+4ax-4a^2-8a+52$$

とおく．

また，2 点 Q，R の座標をそれぞれ $(2,\ 0)$，$(4a+2,\ 0)$ としてよく，線分 QR の中点の座標は，

$$\left(\frac{2+(4a+2)}{2},\ \frac{0+0}{2}\right) \text{ すなわち } (2a+2,\ 0)$$

である．

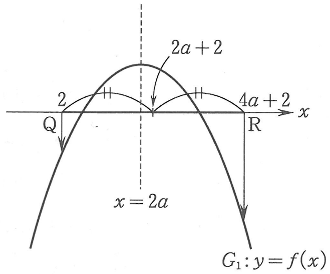
← $a>0$ より，$2<4a+2$．

①より G_1 の軸の方程式は $x=2a$ であるから，求める条件は③および

$$\begin{cases} f(2)\leqq 0 & \cdots④ \\ 2a>2 & \cdots⑤ \end{cases}$$

である．

←



対称性を考慮すると，

$$f(4a+2)\leqq 0$$

は条件として不要である．

$f(2)=-4a^2+48$ であるから，④より，

$$a^2\geqq 12$$

であり，$a>0$ より，

$$a\geqq 2\sqrt{3} \qquad \cdots④'$$

である．

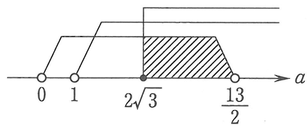
⑤より，

$$a>1 \qquad \cdots⑤'$$

であるから，③，④′，⑤′より，G_1 が線分 QR (両端を含む)と異なる 2 点で交わるのは，

$$\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\leqq a<\frac{\boxed{13}}{\boxed{2}}$$

←



のときである．