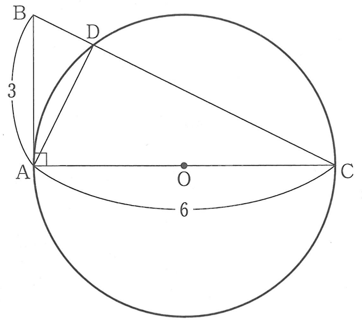
第5問　図形の性質



$\triangle$ABC に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+CA^2 \\ &= 3^2+6^2 \\ &= 45 \end{aligned}$$

であるから，BC＞0 より，

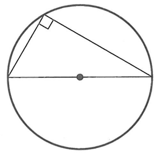
$$BC=\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

点 D は線分 AC を直径とする円 O 上の点であるから，

$$\angle ADC=\boxed{90}^\circ$$

である．



直径に対する円周角は 90°.

$\triangle$ABC$\backsim\triangle$DAC であるから，

$$\begin{aligned} BC:CA &= AC:CD \\ 3\sqrt{5}:6 &= 6:CD \\ 3\sqrt{5}\,CD &= 6\cdot 6 \\ CD &= \frac{\boxed{12}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}} \end{aligned}$$

$\triangle$ABC と $\triangle$DAC は，

$$\begin{cases} \angle BAC=\angle ADC\ (=90^\circ), \\ \angle ACB=\angle DCA \end{cases}$$

であるから，

$$\triangle ABC\backsim\triangle DAC.$$

であり，

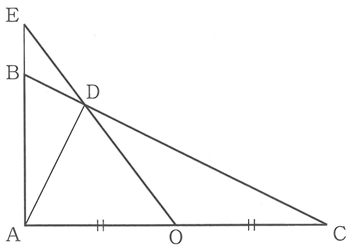
$$\begin{aligned} BD &= BC-CD \\ &= 3\sqrt{5}-\frac{12\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}} \end{aligned}$$

である．

方べきの定理より，

$$\begin{aligned} BD\cdot BC &= BA^2 \\ BD\cdot 3\sqrt{5} &= 3^2 \\ BD &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

と求めてもよい．



三角形 ABC と直線 OE にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BE}{EA}=1$$

$$\frac{3}{3}\cdot\frac{\frac{12\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}}\cdot\frac{BE}{EA}=1$$

$$4\cdot\frac{BE}{EA}=1$$

$$\frac{BE}{AE}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

である．

よって，

$$AE=\frac{4}{3}AB=\frac{4}{3}\cdot 3=4$$

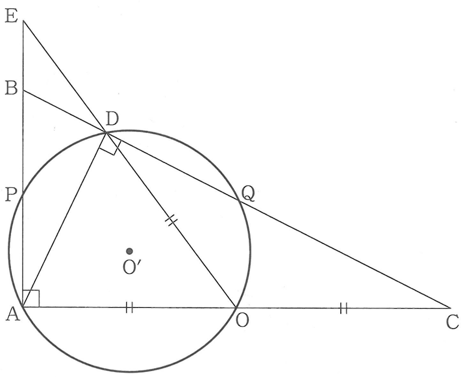
であり，△AOE に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}OE^2&=AO^2+EA^2\\&=3^2+4^2\\&=25\end{aligned}$$

であるから，OE＞0 より，

$$OE=\boxed{5}$$

である．



方べきの定理より，

$$EP\cdot EA=ED\cdot EO$$

$$EP\cdot 4=2\cdot 5$$

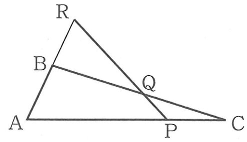
$$EP=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$$

であり，

$$CQ\cdot CD=CO\cdot CA$$

$$CQ\cdot\frac{12\sqrt{5}}{5}=3\cdot 6$$

メネラウスの定理

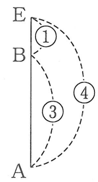


$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RA}=1.$$

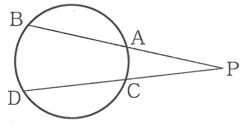
$$CD=\frac{12\sqrt{5}}{5},\quad BD=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

また，O は辺 AC の中点であるから，

$$OA=OC=3.$$



方べきの定理



$$PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$

OD は円 O の半径であるから，

$$OD=OA=3.$$

よって，

$$ED=OE-OD=5-3=2.$$

$$CQ=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である.

ここで，$\angle ADC=90°$ であることとQが線分CD上にあることから，

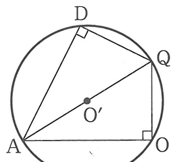
$$\angle ADQ=90°$$

である.

よって，線分AQは円O′の直径となるから，

$$\angle AOQ=90°$$

である.



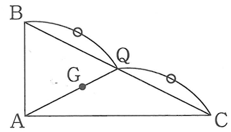
したがって，AB∥OQであり，さらに，Oは辺ACの中点であるからQは辺BCの中点となるので，△ABCにおいて，線分AQは中線である.

中線とは，「三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分」のことである.

ゆえに，△ABCの重心Gは線分AQ上にあり，

$$AG=\frac{2}{3}AQ \qquad \cdots ①$$

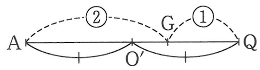
である.



AG:GQ＝2:1.

①とO′が線分AQの中点より，

$$\begin{aligned} O'G &= AG-AO' \\ &= \frac{2}{3}AQ-\frac{1}{2}AQ \\ &= \frac{1}{6}AQ \end{aligned}$$



であるから，

$$\frac{O'G}{AQ}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$$

である.