第4問　整数の性質

(1)　ある整数が3の倍数であるかどうかについての判定方法は，

各位の数の和が3の倍数

であるから，$\boxed{ア}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

$b=1$ のとき，

$$N=1a1111$$

であり，N の各位の数の和は，

$$1+a+1+1+1+1=a+5$$

であるから，N が3の倍数となるための条件は，

$$a+5 \text{ が3の倍数}$$

である．

$0 \leqq a \leqq 9$ より，$5 \leqq a+5 \leqq 14$ であるから，

$$a+5=6,\ 9,\ 12.$$

よって，N が3の倍数となるような a の値は，

$$a=\boxed{1},\ \boxed{4},\ \boxed{7}$$

である．

(2)
$$10^2=100=7\cdot14+2$$

であるから，10^2 を7で割ったときの余りは $\boxed{2}$ である．

$$10^3=1000=7\cdot142+6$$

であるから，10^3 を7で割ったときの余りは $\boxed{6}$ である．

$$10^4=10000=7\cdot1428+4$$

であるから，10^4 を7で割ったときの余りは $\boxed{4}$ である．

$$10^5=100000=7\cdot14285+5$$

であるから，10^5 を7で割ったときの余りは $\boxed{5}$ である．

$$
\begin{aligned}
10^4&=(10^2)^2\\
&=(7\cdot14+2)^2\\
&=7^2\cdot14^2+2\cdot7\cdot14\cdot2+2^2\\
&=7(7\cdot14^2+2\cdot14\cdot2)+4
\end{aligned}
$$

より，10^4 を7で割ったときの余りは4であるとしてもよい．

$$
\begin{aligned}
10^5&=10^2\cdot10^3\\
&=(7\cdot14+2)(7\cdot142+6)\\
&=7(7\cdot14\cdot142+14\cdot6+2\cdot142)+12\\
&=7(7\cdot14\cdot142+14\cdot6+2\cdot142+1)+5
\end{aligned}
$$

より，10^5 を7で割ったときの余りは5であるとしてもよい．

(3)
$$N=10^5+a\times10^4+10^3+10^2+b\times10+1$$

と表すことができるから，(2) より，N を7で割ったときの余りは，

$$5+a\cdot4+6+2+b\cdot3+1$$

すなわち，

$$\boxed{4}a+\boxed{3}b+14$$

を7で割ったときの余りと一致する．

ここで，

$$4a+3b+14=7(a+2)+\boxed{3}(b-a)$$

と変形できるから，N を7で割ったときの余りは，$3(b-a)$ を7で割ったときの余りと一致する．

さらに，3と7は互いに素であるから，N が7で割り切れるとき，$b-a$ が7で割り切れる．

(2) より，

$$
\begin{aligned}
10&=7+3,\\
10^2&=7k+2,\\
10^3&=7\ell+6,\\
10^4&=7m+4,\\
10^5&=7n+5
\end{aligned}
$$

($k,\ \ell,\ m,\ n$ は整数)

と表すことができるから，

$$
\begin{aligned}
N&=10^5+a\times10^4+10^3+10^2+b\times10+1\\
&=(7n+5)+a(7m+4)+(7\ell+6)\\
&\qquad+(7k+2)+b(7+3)+1\\
&=7(n+am+\ell+k+b)\\
&\qquad+5+a\cdot4+6+2+b\cdot3+1.
\end{aligned}
$$

よって，N を7で割ったときの余りは，$5+a\cdot4+6+2+b\cdot3+1$ を7で割ったときの余りと一致する．

$0 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$ より，$-9 \leqq b-a \leqq 9$ であるから，N が 7 で割り切れるとき，

$$b-a=\boxed{0},\ \pm\boxed{7}$$

である.

(4)
$$N=1a11b1.$$

3 と 7 は互いに素であるから，N が 21 で割り切れるのは，N は 3 で割り切れて，さらに 7 でも割り切れるときである.

N の各位の数の和は，

$$1+a+1+1+b+1=a+b+4$$

であるから，(1) と同様に，N が 3 で割り切れるとき，$a+b+4$ が 3 で割り切れる.

また，(3) より，N が 7 で割り切れるとき，

$$b-a=0,\ \pm 7$$

である.

(i) $b-a=0$，すなわち $a=b$ のとき.

N が 21 で割り切れるならば，$a+b+4$，すなわち $2a+4$ が 3 で割り切れるから，$0 \leqq a \leqq 9$ より，

$$a=1,\ 4,\ 7$$

である.

$a=b$ より，N が 21 で割り切れるような $(a,\ b)$ の組は，

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (4,\ 4),\ (7,\ 7)$$

(これらは $0 \leqq b \leqq 9$ を満たす)

である.

(ii) $b-a=7$，すなわち $b=a+7$ のとき.

N が 21 で割り切れるならば，$a+b+4$，すなわち $2a+11$ が 3 で割り切れるから，$0 \leqq a \leqq 9$ より，

$$a=2,\ 5,\ 8$$

である.

$b=a+7$ より，

$$(a,\ b)=(2,\ 9),\ (5,\ 12),\ (8,\ 15)$$

であるが，$0 \leqq b \leqq 9$ より，N が 21 で割り切れるような $(a,\ b)$ の組は，

$$(a,\ b)=(2,\ 9)$$

である.

(iii) $b-a=-7$，すなわち $a=b+7$ のとき.

N が 21 で割り切れるならば，$a+b+4$，すなわち $2b+11$ が 3 で割り切れるから，$0 \leqq b \leqq 9$ より，

$$b=2,\ 5,\ 8$$

である.

$a=b+7$ より，

⬅ $0 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$ より，

$$-9 \leqq -a \leqq 0,$$
$$0 \leqq b \leqq 9.$$

辺々を加えると，

$$-9 \leqq b-a \leqq 9.$$

⬅ $0 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$b=a+7$ より，

$$0 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq a+7 \leqq 9$$

であるから，

$$0 \leqq a \leqq 2.$$

よって，$2a+11$ が 3 で割り切れるのは，$a=2$ のときのみとしてもよい.

$$(a,\ b)=(9,\ 2),\ (12,\ 5),\ (15,\ 8)$$

であるが，$0 \leqq a \leqq 9$ より，N が 21 で割り切れるような $(a,\ b)$ の組は，

$$(a,\ b)=(9,\ 2)$$

である．

(i)，(ii)，(iii) より，N が 21 で割り切れるような $(a,\ b)$ の組は，

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (4,\ 4),\ (7,\ 7),\ (2,\ 9),\ (9,\ 2)$$

の $\boxed{5}$ 組ある．

(iii) は (ii) において a と b を入れかえたものであるから，(ii) の $(a,\ b)=(2,\ 9)$ に対応して，(iii) からは $(a,\ b)=(9,\ 2)$ が得られると考えてもよい．