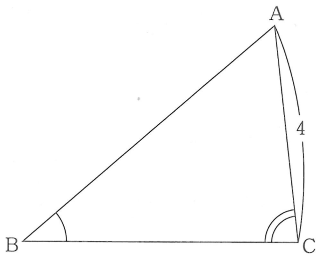
第2問　図形と計量，データの分析

〔1〕



$$\begin{cases} \mathrm{BC} > 4, \\ \sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}, \\ \sin\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}. \end{cases}$$

正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$$

であるから，

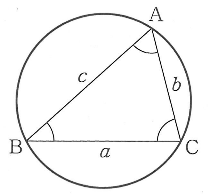
$$\mathrm{AB} = \frac{\sin\angle\mathrm{BCA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}\cdot\mathrm{CA}$$

$$= \frac{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}\cdot 4$$

$$= \boxed{6}$$

である．

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

（R は △ABC の外接円の半径）

また，△ABC は鋭角三角形より，$0° < \angle\mathrm{ABC} < 90°$ であるから，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2\angle\mathrm{ABC}}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

$0° < \theta < 90°$ のとき，

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}.$$

BC$= x$ とおくと，余弦定理より，

$$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$4^2 = 6^2 + x^2 - 2\cdot 6\cdot x\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2 - \boxed{9}\,x + \boxed{20} = 0$$

$$(x-4)(x-5) = 0$$

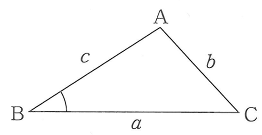
$$x = 4,\ 5$$

であるから，BC$= x > 4$ より，

$$\mathrm{BC} = \boxed{5}$$

である．

余弦定理



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B.$$

△ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2R$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\mathrm{CA}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}} \\
&= \frac{4}{2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}} \\
&= \frac{8\sqrt{7}}{7}
\end{aligned}
$$

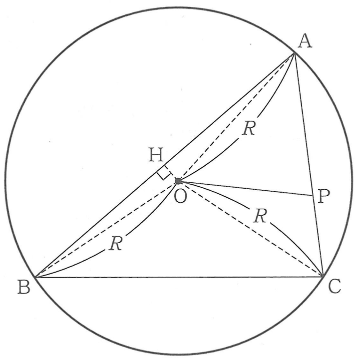
である．

OP の最大値は R であるから，

$$\frac{\boxed{8}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{7}}$$

である．

← OP の長さが最大となるのは，P が A または B または C と一致するときである．



← △ABC は鋭角三角形であるから，外接円の中心 O はその内部にある．

さらに，中心 O から辺 AB に垂線 OH を下ろし，△OAH に三平方の定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OH} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} \\
&= \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)^2 - 3^2} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{7}
\end{aligned}
$$

である．

← 点 H は辺 AB の中点である．

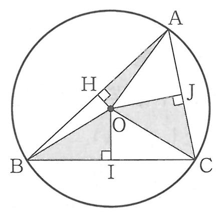
3 辺 AB，BC，CA のうち，辺 AB の長さが最大であるから，中心 O からの距離は辺 AB が最小である．

よって，OP の最小値は OH であるから，

$$\frac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{7}}$$

である．

←



O から辺 BC，CA にそれぞれ垂線 OI，OJ を下ろす．

OA＝OB＝OC かつ CA＜BC＜AB であるから，△OAH，△OBI，△OCJ に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{OH} < \mathrm{OI} < \mathrm{OJ}$$

である．

〔2〕

(1) 2013 年の 10 道府県の携帯電話加入件数のデータ(単位は千件)を小さい方から順に並べると,

1120, 1292, 2308, 2683, 2897,

5082, 5353, 5683, 7877, 9995

である.

第 3 四分位数は，上位のデータ

5082, 5353, 5683, 7877, 9995

の中央値であるから,

$\boxed{5683}$ 千件

である.

(2) 箱ひげ図より，2000 年の中央値は，2010 年の第 1 四分位数より小さいから，⓪は正しくない.

箱ひげ図より，2013 年の第 1 四分位数は，2000 年の第 3 四分位数より小さいから，①は正しくない.

範囲(レンジ)が最も大きい年は，箱ひげ図より 2012 年か 2013 年のいずれかである.

表より，2012 年の範囲(レンジ)は,

$9708-1071=8637$ (千件)

であり，2013 年の範囲(レンジ)は,

$9995-1120=8875$ (千件)

であるから，2013 年の方が大きいので，③は正しくない.

②，④は正しい.

よって，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$，$\boxed{④}$ である.

(3) 大阪府の世帯数は 4000 千世帯以上である．1 世帯あたりの携帯電話加入件数が 3.0 件以上であるとすると，加入件数は 12000 千件以上になるが，散布図より，加入件数は 11000 千件を超えないから，②は正しくない.

携帯電話加入件数が 3000 千件を超えず，しかも世帯数が 1000 千世帯を超える道府県は散布図より 3 つ以上あるから，③は正しくない.

⓪，①，④は正しい.

よって，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$，$\boxed{③}$ である.

四分位数・中央値

データを値の大きさの順に並べたとき，それらを 4 等分する区切りの値を四分位数といい，小さい方から順に第 1 四分位数，第 2 四分位数(中央値)，第 3 四分位数という.

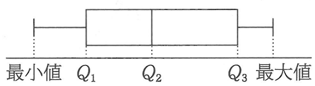
範囲(レンジ)

最大値から最小値を引いたものを範囲(レンジ)という．つまり,

(範囲) = (最大値) − (最小値).

箱ひげ図

データの散らばりを，最小値，第 1 四分位数(Q_1)，中央値(Q_2)，第 3 四分位数(Q_3)，最大値を用いて図示したものを箱ひげ図という.



表より，2012 年の最大値は 9708，最小値は 1071 である.

また，2013 年の最大値は 9995，最小値は 1120 である.

②については,

(四分位範囲)

= (第 3 四分位数) − (第 1 四分位数)

であり，箱ひげ図の箱の幅を見て考えるとよい.

〔3〕

(1) 散布図では，データを表す点が正の傾きの直線状に並んでいる．かなり強い正の相関があるので，変量 w と変量 y の相関係数に最も近い値を選択肢から選ぶと，0.94 である．

したがって，$\boxed{ナ}$ には $\boxed{⑤}$ が当てはまる．

(2) $w=\dfrac{x}{1000}$ であるから，w の分散 s'^2 は x の分散 s^2 の

$\left(\dfrac{1}{10^3}\right)^2=\dfrac{1}{10^6}$ 倍である．したがって，$\dfrac{s'^2}{s^2}=\dfrac{1}{10^6}$ であるから，$\boxed{ニ}$ には $\boxed{⑤}$ が当てはまる．

また，変量 x と変量 y の相関係数 r と，変量 w と変量 y の相関係数 r' は等しいので，$\dfrac{r'}{r}=1$ である．

したがって，$\boxed{ヌ}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

⬅ 変量 x，y について，新しい変量 X，Y を

$$X=ax+b,\quad Y=cy+d$$

と定める．ただし，a，b，c，d は定数で，$ac\neq 0$ とする．

(1) 平均値について，

$$\overline{X}=a\overline{x}+b,\quad \overline{Y}=c\overline{y}+d.$$

(2) 分散について，

$${s_X}^2=a^2{s_x}^2,\quad {s_Y}^2=c^2{s_y}^2.$$

(3) 標準偏差について，

$$s_X=|a|s_x,\quad s_Y=|c|s_y.$$

(4) 共分散について，

$$s_{XY}=ac\,s_{xy}.$$

(5) 相関係数について，

$$\begin{cases} ac>0 \text{ ならば } & r_{XY}=r_{xy}, \\ ac<0 \text{ ならば } & r_{XY}=-r_{xy}. \end{cases}$$