第1問　数と式，集合と論理，２次関数

〔1〕

2次方程式 $x^2-5x+5=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{\boxed{5}\pm\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

このうち，小さい方が x_1，大きい方が x_2 であるから，

$$x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

であり，$\alpha=|x_1-2|$，$\beta=|x_2-2|$ より，

$$\alpha=\left|\frac{5-\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\beta=\left|\frac{5+\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

である．

よって，

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{\boxed{5}},$$

$$\alpha\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\boxed{1}$$

である．

このとき，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(\sqrt{5})^2-2\cdot1$$
$$=\boxed{3}$$

である．

また，

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=3^2-2\cdot1^2$$
$$=7$$

なので

$$\alpha^8+\beta^8=(\alpha^4+\beta^4)^2-2\alpha^4\beta^4$$
$$=7^2-2\cdot1^4$$
$$=\boxed{47}$$

である．

$2<\sqrt{5}<3$ より，

$$\frac{2-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{3-1}{2}$$

なので

⬅ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a，b，c は実数）の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

⬅ a が実数のとき，

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqq0\text{ のとき}),\\ -a & (a<0\text{ のとき}).\end{cases}$$

また，$4<5<9$ より，

$$2<\sqrt{5}<3$$

であるから，

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0.$$

⬅ $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

より，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta.$$

$$\frac{1}{2}<\alpha<1$$

であるから，

$$0<\alpha<1$$

であり，

$$0<\alpha^8<1$$

である．

これに $\alpha^8=47-\beta^8$ を代入すると，

$$0<47-\beta^8<1$$

となり，

$$46<\beta^8<47$$

が得られる．

したがって，$m \leqq \beta^8<m+1$ を満たす整数 m は，

$$\boxed{46}$$

である．

← $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

［2］

(1) $C \subset A$ となるのは，

$$2 \in A$$

のときであるから，

$$a^2-a=2$$
$$a^2-a-2=0$$
$$(a+1)(a-2)=0$$
$$a=-1,\ 2$$

であり，a は自然数より，

$$a=\boxed{2}$$

である．

← $C \subset A$ とは，「C のすべての要素が A の要素でもある」ということである．

← $A=\{3,\ 4,\ 7,\ 9,\ a^2-a\}$，
$C=\{2,\ 7,\ 9\}$
であり，C の要素のうち，7, 9 は A の要素でもあるから，2 が A の要素でなければならない．

(2) $A \cap B=\{3,\ 4\}$ となるには，

$$3 \in B \quad \text{かつ} \quad 4 \in B$$

であることが必要であり，このとき，

$$\begin{cases} a+b+1=3, \\ 2a+b=4 \end{cases} \cdots(\mathrm{i}) \quad \text{または，} \quad \begin{cases} a+b+1=4, \\ 2a+b=3 \end{cases} \cdots(\mathrm{ii})$$

が成り立つ．

(i) $\begin{cases} a+b+1=3, \\ 2a+b=4 \end{cases}$ のとき．

これを解くと，

$$a=2, \quad b=0$$

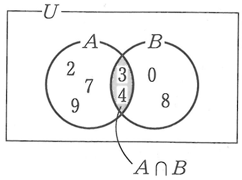
であり，このとき，

$$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9\},$$
$$B=\{0,\ 3,\ 4,\ 8\}$$

← $A \cap B=\{3,\ 4\}$ とは，「A と B の両方に共通する要素が 3, 4 のみである」ということである．

← $A=\{3,\ 4,\ 7,\ 9,\ a^2-a\}$，
$B=\{0,\ 8,\ a+b+1,\ 2a+b\}$
であるから，3, 4 が B の要素でなければならない．

であるから，$A\cap B=\{3,\ 4\}$ を満たす．



(ii) $\begin{cases} a+b+1=4, \\ 2a+b=3 \end{cases}$ のとき．

これを解くと，

$$a=0,\quad b=3$$

であるが，a が自然数であることに反する．

よって，(i), (ii) より，

$$(a,\ b)=(\boxed{2},\ \boxed{0})$$

である．

(3) $A\cap\overline{B}=\{2,\ 3,\ 7,\ 9\}$ となるには，

$$2\in A\cap\overline{B},\quad 4\notin A\cap\overline{B}$$

であることが必要であり，$4\in A$ であることに注意すると，

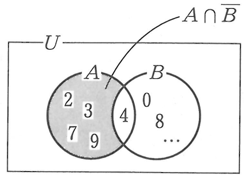
$$2\in A,\quad 4\in B$$

であることが必要であり，このとき，

$$\begin{cases} a^2-a=2, \\ a+b+1=4 \end{cases}\ \cdots\text{(iii)}\quad または，\begin{cases} a^2-a=2, \\ 2a+b=4 \end{cases}\ \cdots\text{(iv)}$$

が成り立つ．

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 3,\ 7,\ 9\}$ とは，「A の要素であるが，B の要素ではないものが 2, 3, 7, 9 のみである」ということである．



$A=\{3,\ 4,\ 7,\ 9,\ a^2-a\}$,
$B=\{0,\ 8,\ a+b+1,\ 2a+b\}$
であるから，2 が A の要素であり，4 が B の要素でなければならない．

(iii) $\begin{cases} a^2-a=2, \\ a+b+1=4 \end{cases}$ のとき．

これより，

$$a=2,\quad b=1$$

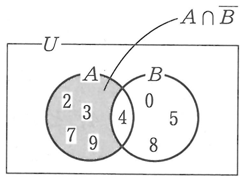
(1) より，$a^2-a=2$ を満たす自然数 a は，$a=2$ である．

であり，このとき，

$$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9\},$$
$$B=\{0,\ 4,\ 5,\ 8\}$$

$2a+b=5$.

であるから，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 3,\ 7,\ 9\}$ を満たし，さらに，$A\cap B=\{4\}$ より，A と B は空集合でない．



(iv) $\begin{cases} a^2-a=2, \\ 2a+b=4 \end{cases}$ のとき．

これより，

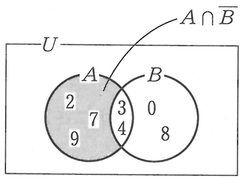
$$a=2,\quad b=0$$

であるが，このとき，

$$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9\},$$
$$B=\{0,\ 3,\ 4,\ 8\}$$

$a+b+1=3$.

であるから，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 7,\ 9\}$ となり，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 3,\ 7,\ 9\}$ を満たさない．

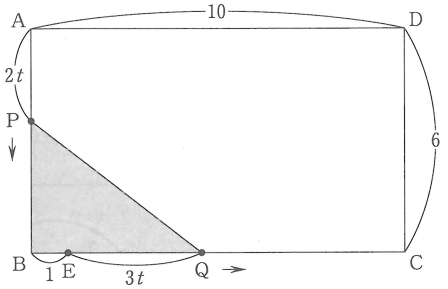


よって，(iii), (iv) より，

$$(a,\ b)=(\boxed{2},\ \boxed{1})$$

である．

［3］



点Pの速さは2，点Qの速さは3であるから，

$$\mathrm{AP}=\boxed{2}\,t,\quad \mathrm{EQ}=3t.$$

← 点Pが移動した距離は（点Pの速さ）×（点Pの移動した時間）で求められる．

したがって，

$$\mathrm{PB}=6-2t,\quad \mathrm{BQ}=\boxed{1}+\boxed{3}\,t$$

となるので，三角形PBQの面積は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ}\\ &=\frac{1}{2}\cdot(6-2t)\cdot(1+3t)\\ &=\boxed{-3}\,t^2+\boxed{8}\,t+\boxed{3}\\ &=-3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{25}{3}. \end{aligned}$$

$0<t<3$ であるから，S は $t=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ において最大値

$\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{3}}$ をとる．