第46回

1

[1] $x^2-5x+5=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$ ア〜ウ

$$x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha=|x_1-2|=\left|\frac{5-\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{5-\sqrt{5}-4}{2}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\beta=|x_2-2|=\left|\frac{5+\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{5+\sqrt{5}-4}{2}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$ エ

$$\alpha\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$$ オ

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\sqrt{5})^2-2\times1=5-2=3$$ カ

$$\alpha^8+\beta^8=(\alpha^4+\beta^4)^2-2(\alpha\beta)^4$$
$$=\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2\}^2-2(\alpha\beta)^4$$
$$=(3^2-2\times1^2)^2-2\times1^4$$
$$=(9-2)^2-2$$
$$=7^2-2=49-2=47$$ キク

$0<\alpha<1$ より $0<\alpha^8<1$.

$\alpha^8+\beta^8=47$

$\beta^8=47-\alpha^8$

$-1<-\alpha^8<0$

$46<47-\alpha^8<47$

$46<\beta^8<47$ 　 $m\leqq\beta^8<m+1$

$m=46$ ケコ.

[2] a: 自然数, b: 整数.

$$\begin{cases} A=\{3,4,7,9,a^2-a\} \\ B=\{0,8,a+b+1,2a+b\} \\ C=\{2,7,9\} \end{cases}$$ 　 $A\cap B\neq\phi$

(1) $C\subset A$ のとき

$a^2-a=2$ 　 $a^2-a-2=0$ 　 $(a-2)(a+1)=0$

$a=2,\ -1.$ 　 $a>0$ より 　 $a=2$ サ

(2) $A\cap B=\{3,4\}$ のとき

$\begin{cases} a+b+1=3 \\ 2a+b=4 \end{cases}$ または $\begin{cases} a+b+1=4 \\ 2a+b=3 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} a+b=2 \\ -)\ 2a+b=4 \\ \hline -a=-2 \end{array}\qquad \begin{array}{r} a+b=3 \\ -)\ 2a+b=3 \\ \hline -a=0 \end{array}$$

$\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ 　 $a=0$ 　 $a\neq0$ より 不適

$(a,b)=(2,0)$ シス

(3) $A\cap\overline{B}=\{2,3,7,9\}$ のとき

$a^2-a=2$ すなわち $a=2$.

また $a+b+1=4$

または

$2a+b=4$

$a=2$ より 　 $2+b+1=4$ 　 $b=1$ 　 $(2,1)$

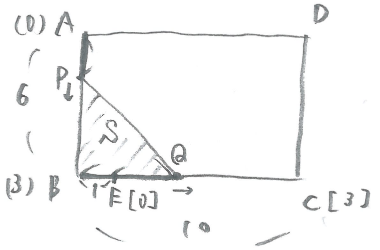
$4+b=4$ 　 $b=0$ 　 $(2,0)$

$(2,0)$ のとき $a+b+1=3$ 　 $2a+b=4$ となり

$A\cap B=\{3,4\}$ となり不適

よって $(a,b)=(2,1)$ セソ

[3].



$AP = 2t$ タ

$BQ = 1+3t$ チツ

$PB = AB - AP = 6 - 2t$

$S = (6-2t)(1+3t)\cdot\frac{1}{2}$

$= (3-t)(1+3t)$

$= -3t^2+8t+3$ テ~ニ

$= -3\left(t^2 - \frac{8}{3}t\right)+3$

$= -3\left\{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\}+3$

$= -3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} + \frac{9}{3}$

$= -3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{25}{3}$

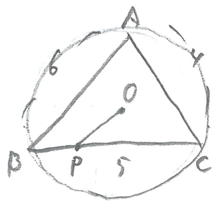
$1 < t < 3$ において、

$t = \frac{4}{3}$ ヌネ

で最大値 $\frac{25}{3}$ ハ~ヒ

[2]

[1]



$\angle A, B, C$ はすべて鋭角。

$BC > 4$.

$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

正弦定理より

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

$AB = \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 6$ ア

$\cos B = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{7}{16}}$

$= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ イウ

$BC = x$ とおくと、

余弦定理より

$\cos B = \frac{6^2+x^2-4^2}{2\times 6\times x}$

$\frac{3}{4} = \frac{36+x^2-16}{12x}$

$9x = x^2+20$

$x^2-9x+20=0$ エ~カ

$(x-4)(x-5)=0$

$x = 4, 5$.

$x > 4$ より、 $BC = 5$ キ

外接円の中心 O と点 P のきょり

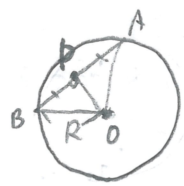
最大 $P = A, B, C$ のとき。

すなわち、外接円の半径と一致。

正弦定理より、

$2R = \frac{AC}{\sin B}$

$R = \frac{4}{2\times\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ ク~コ



最小 外接円の弦で最大の AB が、中心 O に最も近いので、AB の中点と中心 O のきょり

三平方より

$OP^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$= \frac{64}{7} - 9$

$= \frac{64-63}{7} = \frac{1}{7}$

$OP = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ サシ

[2] 相1: 3
相2: 5, 6
相3: 8

(1) 2013年 相3回位数
兵庫県 5683 千件 スセソタ

(2) 0 1 2 3 4
× × ○ × ○
2, 4 チツ

(3) 0. 1. 2. 3. 4
○ ○ × × ○
2, 3 テト

[3]
人口 変量 x 人
小学校数 変量 y 校
$w = \frac{x}{1000}$

(1) w と y の相関係数
0.94 5 ナ

(2) x の分散
$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$
w の分散
$$S'^2 = \frac{(w_1-\bar{w})^2+(w_2-\bar{w})^2+\cdots+(w_n-\bar{w})^2}{n}$$
$$= \frac{\left(\frac{x_1}{1000}-\frac{\bar{x}}{1000}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1000}-\frac{\bar{x}}{1000}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{1000}-\frac{\bar{x}}{1000}\right)^2}{n}$$
$$= \frac{1}{1000^2} S^2$$
$$\frac{S'^2}{S^2} = \frac{1}{1000^2} = \frac{1}{(10^3)^2} = \frac{1}{10^6} \quad 5 \ ニ$$

x と y の相関係数 r
w と y の 〃 r'
$$\frac{r'}{r} = 1 \quad 1 \ ヌ$$

[4]
⓪ ① ② ③ ④ ○○

2つ同時
$_5C_2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ 通り アイ
⓪が入る 4通り ウ

1 2 3 4 W/R

⓪ ⓦ 1 2 3 4

(a). ⓪, ⓧ のとき x のカードをうら返す
(b). ⓨ, ⓧ $(x \neq 0, y \neq 0)$ のとき x と y を入れかえる。

⇒ R をとりのぞく。 W W W = X.

(1) 1回 Xが3…9. → (a) ⓪が入る。
$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ エオ

1回 Xが4…9. → (b) ⓪なし。
$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ カキ

(2). 2回 Xが3…9 → (a).(b)
$\frac{4}{10} \times \frac{6}{10} \times 2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{12}{25}$ クケコ

Xが4…9 → (b).(b) / (a).(a) 同じ組みの数

(b).(b)
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

(a)(a). 同じ数
$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 4 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

$\frac{9}{25} + \frac{1}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ サシ

Xが3…9の奇数 (a).(b)

1回目	2回目
0, 1	1, 4 3, 4
0, 2	1, 4 2, 4 3, 4
0, 3	1, 4
0, 4	1, 2 1, 3 1, 4 3, 4
	10通り

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 10 \times 2 = \frac{1}{5}$ セソ

4.

$N = 1a11b1_{(10)}$

(1) 3の倍数の判定.

⇒ 各位の数の和が3の倍数 $\underline{2}$ ア

$b=1$のとき Nが3の倍数となるのは

$1+a+1+1+1+1 = 3n$.

$a+5 = 3n$.

$0 \leq a \leq 9$ より.

$a+5=6$. $a=1$.

$a+5=9$ $a=4$

$a+5=12$ $a=7$

$a+5=15$ $\cancel{a=10}$

$a = \underline{1, 4, 7}$ イ〜エ

(2) $10 = 7 \times 1 + 3$

$10^2 = (7+3)^2$

$= 7^2 + 7 \cdot 6 + 9$

$= 7(7+6+1) + 2$.

あまり $\underline{2}$ オ.

$10^3 = (7+3)^3$

$= 7^3 + 7 \cdot 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + 3^3$ ($3^3 = 27$)

$= 7(7^2 + 7 \cdot 3^2 + 3^3 + 3) + 6$.

あまり $\underline{6}$ カ.

$10^4 = (10^2)^2 = (7s+2)^2$

あまり. $\underline{4}$ キ.

$10^5 = 10^2 \cdot 10^3 = (7s+2)(7t+6)$

$12 = 7 \times 1 + 5$.

あまり. $\underline{5}$ ク

(3) $N = 10^5 + a \times 10^4 + 10^3 + 10^2 + b \times 10 + 1$

より: 7でわった余りは.

$5 + a \times 4 + 6 + 2 + b \times 3 + 1$

$= \underline{4a + 3b} + 14$ ケコ.

$4a+3b+14$

$= 7a - 3a + 3b + 14$

$= 7(a+2) + 3(\underline{b}-a)$ サ

Nが7でわりきれるとき.

$3(b-a)$ は7の倍数となる.

$b - a = \underline{0, \pm 7}$ シス —①

(4) Nが21でわりきれるのは

Nが7の倍数 かつ 3の倍数

3の倍数のとき.

$1+a+1+1+b+1 = 3m$.

$a+b = 3m-4$

$0 \leq a \leq 9$. $0 \leq b \leq 9$ より

$0 \leq a+b \leq 18$

$a+b = 2, 5, 8, 11, 14, 17$ —②

(i) ①より. $a-b=0$ すなわち $a=b$ のとき

②より $2a = 2, 5, 8, 11, 14, 17$

aは整数より

$a = 1, 4, 7$. $\underline{3組}$. —(i)

(ii) ①より $a-b=7$ すなわち. $b=a-7$ のとき

②より $2a-7 = 2, 5, 8, 11, 14, 17$

$2a = 9, 12, 15, 18, 21, 24$

aは整数より $a = 6, 9, 12$

$0 \leq a \leq 9$ より $a = 6, 9$

$a-7 = -1, 2, = b$

$0 \leq b \leq 9$ より $b = 2$. $\underline{1組}$ —(ii)

(iii) ①より $a-b=-7$. すなわち. $b=a+7$.

②より. $2a+7 = 2, 5, 8, 11, 14, 17$

$2a = -5, -2, 1, 4, 7, 10$

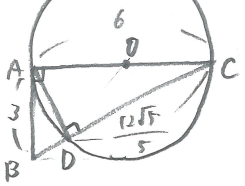
$0 \leq a \leq 9$ の整数 より. $a = 2, 5$.

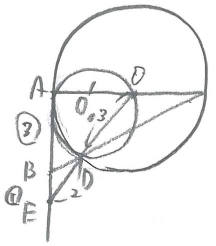
$a+7 = 9, 12 = b$

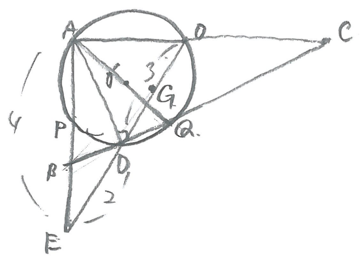
$0 \leq b \leq 9$ より $b=9$. $\underline{1組}$ —(iii)

(i)〜(iii) より. $3+1+1 = \underline{5}$組 セ

5







$BC=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}$

$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ アイ

$\angle ADC=90^\circ$ ウエ

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$ であるから

$AC:DC=BC:AC$

$6:CD=3\sqrt{5}:6$

$\cancel{3}\sqrt{5}\,CD=\cancel{36}\,12$

$CD=\dfrac{12}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ オ〜ク

$BD=BC-CD$

$=3\sqrt{5}-\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

$=\dfrac{15\sqrt{5}-12\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ケ〜サ

メネラウスより

$\dfrac{BE}{AE}\cdot\dfrac{DC}{BD}\cdot\dfrac{OA}{CO}=1$

$\dfrac{BE}{AE}\cdot\dfrac{\frac{\cancel{12}\,4\sqrt{5}}{5}}{\frac{\cancel{3}\,1\sqrt{5}}{5}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{3}}=1$

$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{4}$ シス

$AE=\dfrac{4}{3}AB=\dfrac{4}{3}\times 3=4$

$OE=\sqrt{4^2+3^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ セ

方べきより

$EP\cdot EA=ED\cdot EO$

$EP\cdot \cancel{4}\,2=\cancel{2}\,1\cdot 5$

$2EP=5$

$EP=\dfrac{5}{2}$ ソタ

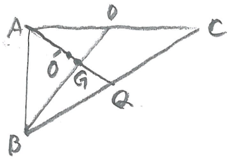
$CQ\cdot CD=CO\cdot CA$

$CQ\cdot\dfrac{\cancel{12}\,2\sqrt{5}}{\cancel{5}}=3\cdot\cancel{6}\,1$

$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}CQ=3$

$CQ=\dfrac{15}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\cancel{15}\,3\sqrt{5}}{\cancel{10}\,2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ チ〜テ

$\triangle ABC$ の重心 G.



$\begin{cases} BC=3\sqrt{5} \\ CQ=\dfrac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ より.

Q は BC の中点 である.

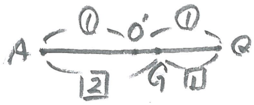
また. $\angle ADQ=90^\circ$ より. AQ は 円 O′ の直径.

したがって, 重心 G は. 直径 A−O′−Q 上にある.

また, 重心より. $AG:GQ=2:1$.

$\boxed{AQ}:AO':O'Q=\boxed{2}:1:1$

$\boxed{AQ}:AG:GQ=\boxed{3}:2:1$



$AQ:AO':O'Q=6:3:3$.

$AQ:AG:GQ=6:4:2$.

$AQ:O'Q:GQ=6:3:2$.

$O'G=O'Q-GQ=3-2=1$

よって. $AQ:O'G=6:1$ となるので

$\dfrac{O'G}{AQ}=\dfrac{1}{6}$ トナ