第4問　整数の性質

p，q はそれぞれ2桁の自然数 N の十の位と一の位であるから，

$$1 \leqq p \leqq 9,\quad 0 \leqq q \leqq 9 \qquad \cdots ①$$

を満たす整数であり，

$$N = \boxed{10}\,p + q$$

である．

(1)　積 pq の2倍と N が等しいとき，

$$2pq = N$$

$$2pq = 10p + q$$

$$\boxed{2}\,p\left(q - \boxed{5}\right) = q \qquad \cdots ②$$

である．

①，②より，

$$0 \leqq q - 5 \text{ かつ } q \leqq 9$$

← $2p(q-5) \geqq 0$ かつ $p > 0$ より，$q - 5 \geqq 0$.

すなわち

$$5 \leqq q \leqq 9$$

であり，q が偶数であることを考慮すると，

← ②の左辺は偶数.

$$q = 6,\ 8$$

である．

②より，

$$q = 6 \text{ のとき } p = 3,\quad q = 8 \text{ のとき } p = \frac{4}{3}$$

← $p = \frac{4}{3}$ は不適.

であるから，②を満たす (p, q) は $(3, 6)$ の $\boxed{1}$ 組ある．

(2)　積 pq の3倍と N が等しいとき，

$$3pq = N$$

$$3pq = 10p + q$$

$$p(3q - 10) = q \qquad \cdots ③$$

である．

①，③より，

$$0 \leqq 3q - 10 \leqq q \quad \text{すなわち} \quad \frac{10}{3} \leqq q \leqq 5$$

← $p(3q-10) = q \geqq 0$ かつ $p > 0$ より，$3q - 10 \geqq 0$.
$p(3q-10) = q$ かつ $p \geqq 1$ より，$3q - 10 \leqq q$.

であるから，

$$q = 4,\ 5$$

である．

③より，

$$q = 4 \text{ のとき } p = 2,\quad q = 5 \text{ のとき } p = 1$$

であるから，③を満たす (p, q) は，

$$(p, q) = (1, 5),\ (2, 4)$$

である．

このうち q が最小のものは，

$$(p,\ q)=(\boxed{\ 2\ },\ \boxed{\ 4\ })$$

であり，$(p,\ q)$ は $\boxed{\ 2\ }$ 組ある．

(3) 積 pq と N が等しいとき，

$$pq=N$$
$$pq=10p+q$$
$$p(q-10)=q$$

であるが，① より，

左辺は負，　右辺は 0 以上

であるから，$p(q-10)=q$ を満たす $(p,\ q)$ は存在しない．

⬅ $n=1$ のとき．

$n \geqq 4$ とする．積 pq の n 倍と N が等しいとき，

$$npq=N$$
$$npq=10p+q$$
$$p(nq-10)=q \qquad \cdots ④$$

である．

⬅ $n=2,\ 3$ のときはそれぞれ(1)，(2)で考察した．

①，④ より，

$$0 \leqq nq-10 \leqq q \quad \text{すなわち} \quad \frac{10}{n} \leqq q \leqq \frac{10}{n-1}$$

⬅ $p(nq-10)=q \geqq 0$ かつ $p>0$ より，
$nq-10 \geqq 0$．
$p(nq-10)=q$ かつ $p \geqq 1$ より，
$nq-10 \leqq q$．

であり，$n \geqq 4$ より，

$$0<\frac{10}{n}, \quad \frac{10}{n-1} \leqq \frac{10}{3}$$

であるから，

$$q=1,\ 2,\ 3$$

である．

$q=1$ のとき，④ より $p(n-10)=1$ であり，p は正の整数であるから，

$$p=n-10=1 \quad \text{すなわち} \quad (n,\ p)=(11,\ 1)$$

である．

$q=2$ のとき，④ より $p(n-5)=1$ であり，p は正の整数であるから，

$$p=n-5=1 \quad \text{すなわち} \quad (n,\ p)=(6,\ 1)$$

である．

$q=3$ のとき，④ より $p(3n-10)=3$ であり，p は正の整数であるから，

$$3n-10=1,\ 3$$

すなわち

$$n=\frac{11}{3},\ \frac{13}{3}$$

であるが，これらは条件を満たさない．

以上のこと，および(1)，(2)における $n=2,\ 3$ についての考察より，積 pq の n 倍と N が等しくなるのは，

$$(n,\ p,\ q)=(2,\ 3,\ 6),\ (3,\ 1,\ 5),\ (3,\ 2,\ 4),$$

(11, 1, 1), (6, 1, 2)

の $\boxed{5}$ 組ある.